

POLITECNICO DI TORINO

TESI DI LAUREA

ROBERTO FALDELLA

PROF. ING. CARLO AMEDEO ARNEODO

DINAMICA DI UN REATTORE NUCLEARE VELOCE

TESI DI LAUREA

DI ROBERTO FALDELLA

Robt FaldeLLa



I N D I C E

PREFAZIONE P. IV

PARTE PRIMA: NEUTRONICA

cap. 1: EQUAZIONE DEL TRASPORTO

- 1.1: L'equazione di Boltzmann p. 2
1.2: Reattori termici e veloci 8
1.3: Equazione del trasporto 15

cap. 2: SEZIONI D'URTO

- 2.1: Scattering elastico: anisotropia polare 24
2.2: Scattering elastico: anisotropia azimutale 41
2.3: Reazioni anelastiche 48
2.4: Risonanze 54

cap. 3: DISCRETIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DEL TRASPORTO

- 3.1: Introduzione 58
3.2: Approssimazione P_L 75
3.3: Approssimazione a multigruppi 97
3.4: Discretizzazione spazio-temporale 105

II

PARTE SECONDA: TERMOCINETICA

cap. 4:	QUESTIONI INTRODUTTIVE	
4.1	Produzione di calore nel core	p. 121
4.2	Problemi di regolazione	134
4.3	Problemi Numerici	147
cap. 5:	BARRA DI COMBUSTIBILE	
5.1	Conduzione del calore	158
5.2	Discretizzazione Numerica	163
cap. 6:	TERMOVETTORE (SODIO)	
6.1	Equazioni generali	170
6.2	Core	177
6.3	Circuiti	191
6.4	Scambiatore di calore	194
6.5	Generatore di Vapore	203
	APPENDICE	
	Tabelle e figure	209
	Bibliografia	214

P R E F A Z I O N E

Il nostro lavoro si propone di studiare il comportamento di un reattore veloce in transitorio, al fine di verificare la sua intrinseca sicurezza ed affidabilità, e in particolare la capacità di seguire il carico, autoregolandosi.

Per ottenere risultati che presentino una certa attendibilità ci è sembrato necessario basarsi su metodi di calcolo almeno in linea teorica accurati; cioè non accettare ipotesi matematicamente comode ma senza fondamento fisico.

Poichè ciò comporta una notevole complessità numerica, abbiamo in primo luogo ricercato tutte le possibilità di semplificazione, cioè tutte quelle assunzioni che, introducendo un errore che, in base a considerazioni teoriche e/o a dati sperimentali, si possa ritenere piccolo o piccolissimo, evitino un probabilmente molto maggiore errore numerico e consentano un non indifferente risparmio di tempo macchina; in secondo luogo abbiamo strutturato il sistema di equazioni in modo che esse, anche se moltissime, fossero completamente disaccoppiate fra loro.

Affinchè questo nostro lavoro, in attesa di essere messo alla prova, potesse esser utile a noi e a chi eventualmente lo leggesse, abbiamo preferito mantenerlo in termini suffi-

cientemente generali da consentire approfondimenti e particolarizzazioni senza dover rifare daccapo l'intero lavoro; ciò al fine di poter sovrapporre un'effettiva esperienza e concretezza progettistica alla formazione propedeutica tipica dei corsi universitari. Abbiamo quindi rinunciato alla programmazione numerica del nostro codice, ritenendo che essa debba esser fatta a misura del reattore e dei dati iniziali, e basata su una vasta conoscenza ed esperienza di metodi numerici, che l'autore della presente al momento non ha; sempre per dare un carattere generale a questo lavoro, abbiamo evitato ogni precisa scelta di carattere impiantistico, eccetto quella relativa al termovettore, giacchè ovviamente i meccanismi della trasmissione del calore e della fluidodinamica sono profondamente diversi in un metallo liquido o in un gas inerte; abbiamo scelto il sodio essenzialmente perchè ci sembra che questa sia la tendenza predominante al momento attuale.

Per stabilire l'ordine di grandezza di alcuni parametri, abbiamo preso come esempio un progetto da 1000 MWe della General Electric, progetto i cui lati essenziali abbiamo riportato nella tabella 1.

Circa i criteri seguiti nello svolgimento di questo lavoro, vogliamo solo notare che per la determinazione spazio-energetico-temporale del flusso neutronico, ai metodi statistici e all'approssimazione S_N - metodi forse più adatti da un punto di vista

numerico - abbiamo preferito - confortati in ciò da Weinberg e Wigner (°) - l'approssimazione P_L , in quanto ci sembra teoricamente più soddisfacente.

Abbiamo inoltre dedicato un relativamente ampio spazio alle sezioni d'urto, la cui trattazione ed esplicitazione riteniamo che sia uno degli argomenti più trascurati sui testi di fisica del reattore.

(°) Weinberg, Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, p. 272

PARTE PRIMA
=====

NEUTRONICA
=====

EQUAZIONE DEL TRASPORTO1.1 L'EQUAZIONE DI BOLTZMANN

Anche se usualmente i termini di "equazione di Boltzmann" e di "equazione del trasporto" vengono assunti come sinonimi, si deve tuttavia notare che la cosiddetta "equazione del trasporto neutronico" (nella sua forma integro-differenziale, e prima forma) può essere considerata come un caso particolare della equazione originaria di Boltzmann, che descrive, da un punto di vista classico, un insieme statistico di particelle interagenti.

Proprio affinché abbia senso una trattazione statistica, è necessario che nel sistema in esame esistano una o più specie di particelle, di ciascuna specie essendo presente un numero elevatissimo di particelle tra loro indistinguibili: ad es. molecole di uno stesso gas, o nuclei di uno stesso elemento.

Poiché in un reattore nucleare i neutroni costituiscono un insieme di particelle considerabili come indistinguibili e presenti in numero sufficientemente elevato da potersi trattare in termini statistici e sufficientemente non-elevato da non impli

care il principio di esclusione di Pauli e la statistica di Fermi-Dirac, l'equazione di Boltzmann può essere assunta a descrivere un insieme di neutroni interagenti con i nuclei del mezzo circostante, per quante ciò comporti alcune cautele di ordine quantistico (sulle quali si tornerà più avanti) e per quanto il termine di "equazione di Boltzmann per i neutroni" sia comunque inesatto, giacchè Ludwig Boltzmann, vissuto tra il 1844 e il 1906, non poteva evidentemente occuparsi di neutroni, "scoperti" da Chadwich nel 1932.

Deduciamo dunque l'equazione di Boltzmann, in parziale riferimento al Williams (1).

Iniziamo col definire la funzione di densità neutronica $N(\bar{r}, \bar{v}, t)$ (2), tale che $N(\bar{r}, \bar{v}, t) d\bar{r} d\bar{v}$ rappresenti il numero di neutroni, presenti all'istante t nell'intorno $d\bar{r}$ del punto \bar{r} , con una velocità compresa nell'intorno $d\bar{v}$ del ~~par~~ vettore \bar{v} . Lavoriamo cioè in uno spazio eptadimensionale, dette spazio orario delle fasi, o di Gibbs, e di Boltzmann, costituito dalle tre variabili posizionali, dalle tre componenti del vettore velocità e dalla variabile temporale. Sono sette variabili indipendenti, anche se la variabile temporale può essere considerata come privilegiata rispetto alle altre, che possono essere assunte come dipendenti implicitamente dal tempo. (Ciò ovviamente nel caso che si passi dalla trattazione "locale", da noi seguita, ad una trattazione "se-

stanziale") \bar{v}

L'equazione di Boltzmann per i neutroni non rappresenta altro che la continuità, o conservazione, del numero di neutroni presenti nell'elemento di volume $d\bar{r} d\bar{v}$ delle spazie delle fasi tra l'istante t e l'istante $t+dt$. Avremo cioè che il numero di n presenti nell'intervallo suddetto sarà eguale al numero di neutroni all'istante $t+dt$ sarà eguale al numero di n presenti nelle stesse intervallate all'istante t più il numero di n che sono arrivati nel tempo dt nel suddetto intervallo meno il numero di n che ne sono usciti. In formole

$$N(\bar{r}, \bar{v}, t+dt) = N(\bar{r}, \bar{v}, t) + N_{in} - N_{out} \quad 1.1$$

Ora, i n possono entrare o uscire dall'intervallo suddetto in due modi diversi: possono essere neutroni di velocità $\bar{v} \pm d\bar{v}$ che arrivano nell'intorno del punto \bar{r} proveniendo da punti diversi (ovvero se ne vanno dal punto \bar{r} verso luoghi diversi), oppure possono essere neutroni che già si trovavano nell'intorno $d\bar{r}$ di \bar{r} , ma con velocità diversa da \bar{v} , e che possono entrare nel e uscire dall'intervallo cinetico $d\bar{v}$ intorno a \bar{v} in conseguenza di collisioni con

(1) Williams, M.M.E.: The slowing down and thermalization of Neutrons, p. 523

(2) la lineetta indica il vettore; dal cap. 6 in avanti indicherà il valor medio

i nuclei presenti nell'intorno $d\bar{r}$ di \bar{r} . (Possono evidentemente anche esserci sorgenti interne impresse all'esterno che iniettino n nel punto \bar{r} con velocità \bar{v} all'istante t , ma di questo terremo conto nel paragrafo terzo allorchè passeremo dall'equazione di Boltzmann all'equazione del trasporto).

Iniziamo col considerare il contributo dato dal passaggio spaziale. E' noto, per il significato fisico dell'operatore di divergenza, che dato un insieme (continuo o discreto) di particelle, caratterizzate dalla densità $n(\bar{r}, \bar{v}, t)$ al punto \bar{r} per la velocità \bar{v} all'istante t , il numero (o la quantità) netta di tali particelle che arrivano in un tempo dt nell'elemento volumico $d\bar{r}$ è data da:

$$- \operatorname{div} \bar{v} n(\bar{r}, \bar{v}, t) d\bar{r} d\bar{v} dt = - \bar{v} n(\bar{r}, \bar{v}, t) d\bar{r} d\bar{v} dt = - \bar{j}(\bar{r}, \bar{v}, t) d\bar{r} d\bar{v} dt$$

essendosi definita la corrente: $\bar{j}(\bar{r}, \bar{v}, t) = \bar{v} n(\bar{r}, \bar{v}, t)$ 1.2
1.3

Si è detto "numero netto" in quanto la divergenza tiene conto della differenza algebrica tra il numero di particelle che escono e quelle che entrano (dando il segno meno).

Passando ora a considerare il contributo dato dalle collisioni (che possono essere elastiche o inelastiche, reazioni di assorbimento o di fissione o altre ancora: di ciò ci occuperemo più avanti), si ha, per definizione di sezione d'urto, che se $N(\bar{r}, \bar{v}, t)$ è la funzione di densità per i neutroni, già definita $N_i(\bar{r}, \bar{u}, t)$ è la funzione di densità per i nuclei dell'elemento (o isotopo) i -esimo, definita allo stesso modo

$\bar{v} - \bar{u}_i$ la velocità relativa neutrone-nucleo elemento i-esimo

$\sigma_i(\bar{v} \rightarrow \bar{v}', \bar{u} \rightarrow \bar{u}')$ la sezione d'urto, differenziale rispetto alle velocità finali, per il-neutr~~o~~ la reazione che porta il neutrone dalla velocità \bar{v} alla velocità \bar{v}' e il nucleo i dalla velocità \bar{u} alla \bar{u}'

allora

$$dt N(\bar{r}, \bar{v}, t) d\bar{r} d\bar{v} N_i(\bar{r}, \bar{u}, t) d\bar{u}_i \sigma_i(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', \bar{u}_i \rightarrow \bar{u}') d\bar{v}' d\bar{u}' \left| \bar{v} - \bar{u}_i \right| \quad 1.4$$

neutroni di velocità \bar{v} passano alla velocità \bar{v}' , nel tempo dt e nell'intorno $d\bar{r}$ di \bar{r} , in conseguenza dell'urto con i nuclei dell'elemento i-esimo, che passano a loro volta dalla velocità \bar{u} alla \bar{u}' .

Il numero totale di neutroni che se ne vanno dall'elemento $d\bar{v}$ intorno a \bar{v} in conseguenza di collisioni nell'intorno $d\bar{r}$ di \bar{r} si otterrà dunque integrando su tutte le velocità finali del neutrone, sulle velocità iniziali e finali dei nuclei e sommando su tutte le specie i di ~~esse~~ isotopi:

$$N_{\text{out-coll}} = dt d\bar{r} d\bar{v} \sum_i \iiint_{\bar{v}'} \iiint_{\bar{u}} \iiint_{\bar{u}'} N(\bar{r}, \bar{v}, t) N_i(\bar{r}, \bar{u}, t) \sigma_i(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', \bar{u} \rightarrow \bar{u}') \left| \bar{v} - \bar{u}_i \right| d\bar{v}' d\bar{u}_i d\bar{u}' \quad 1.5$$

e similmente:

$$N_{\text{in-coll}} = dt d\bar{r} d\bar{v} \sum_i \iiint_{\bar{v}'} \iiint_{\bar{u}} \iiint_{\bar{u}'} N(\bar{r}, \bar{v}', t) N_i(\bar{r}, \bar{u}, t) \sigma_i(\bar{r}, \bar{v}' \rightarrow \bar{v}, \bar{u} \rightarrow \bar{u}') \left| \bar{v}' - \bar{u}_i \right| d\bar{v}' d\bar{u}_i d\bar{u}' \quad 1.6$$

Tenendo ora conto delle 1.1, 1.2, 1.5, 1.6 si addiviene infine all'equazione di Boltzmann per i neutroni

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial N(\bar{r}, \bar{v}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{j}(\bar{r}, \bar{v}, t) = \\
 & = -N(\bar{r}, \bar{v}, t) \sum_i \iiint_{\bar{v}'} \iiint_{\bar{u}_i'} \iiint_{\bar{u}_i} N_i(\bar{r}, \bar{u}_i', t) \sigma_i(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', \bar{u}_i \rightarrow \bar{u}_i') |\bar{v} - \bar{u}_i| d\bar{v}' d\bar{u}_i' d\bar{u}_i \\
 & + \sum_i \iiint_{\bar{v}'} \iiint_{\bar{u}_i} \iiint_{\bar{u}_i'} N(\bar{r}, \bar{v}', t) N_i(\bar{r}, \bar{u}_i', t) \sigma_i(\bar{r}, \bar{v} \rightarrow \bar{v}', \bar{u}_i' \rightarrow \bar{u}_i) |\bar{v} - \bar{u}_i| d\bar{v}' d\bar{u}_i' d\bar{u}_i
 \end{aligned}$$

1.7

che in realtà costituirebbe un sistema di equazioni accoppiate, una per ogni elemento, oltre a quella per i neutroni, tutte formalmente identiche alla suddetta, se non si potesse applicare l'ipotesi semplificativa che i nuclei ritornino allo stato di equilibrio (da definire opportunamente) prima di subire una seconda interazione con i neutroni, assumendo cioè che N_i sia una funzione nota.

1.2 REATTORI TERMICI E VELOCI

Come noto, in un reattore termico la maggior parte delle fissioni avvengono ad energia termica, e risulta dunque necessario determinare con elevata accuratezza la distribuzione spazio-energetico-temporale del flusso neutronico alle energie termiche, nonché l'effetto delle risonanze, fondamentali per l'evoluzione dei transitori.-

Ora, nella zona termica, le energie traslazionali e vibrazionali dei nuclei sono, per definizione di "termico", dello stesso ordine di grandezza delle energie dei neutroni, mentre nella regione delle risonanze, sebbene esista un divario di alcuni ρ ordini di grandezza tra le energie dei neutroni e quelle dei nuclei, queste ultime non sono tuttavia trascurabili perchè attraverso l'effetto Doppler determinano l'allargamento delle risonanze.

Quindi, in entrambe le regioni, il moto dei nuclei non deve assolutamente essere trascurato, e anche nell'ipotesi semplificativa adottata alla fine del paragrafo ~~presente~~ precedente, le $N_1(\vec{r}, \vec{u}, t)$ non possono essere integrate prima di essere state moltiplicate per la velocità relativa $|\vec{v} - \vec{u}|$ e per la sezione d'urto $\sigma(\vec{r}, \vec{v} \rightarrow \vec{v}', \vec{u} \rightarrow \vec{u}')$, differenziale sei volte rispetto alle velocità finali, funzione di 15 variabili scalari, la cui espressione e

splicita non è necessariamente detto che debba esser semplice. Anzi, alle energie in questione intervengono almeno tre fattori a complicare la formulazione esplicita delle σ , nonché la loro derivazione teorica e sperimentale:

- i legami atomici (dell'ordine dell'eV)
- i legami molecolari (di un'ordine di grandezza inferiori), il cui effetto, a parità di altre condizioni, sarebbe quello di incrementare la sezione d'urto (del nucleo non legato) di un fattore $\frac{(A+1)M}{(M+1)A} > 1$ (1), ma evidentemente tra le situazioni in cui si può considerare il nucleo libero (all'effetto delle collisioni con i neutroni) dalla sua molecola, e quelle in cui lo si può considerare stabilmente legato, esiste una continuità di situazioni

(1) si può facilmente dedurre ad es. dalla formula dell'urto secondo Max Born (2):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \frac{k_f}{k_i} \left(\frac{\mu}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{k_i^4} \left| \iint_V e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) d\vec{r} \right|^2$$

ove \vec{k}_i , \vec{k}_f sono i vettori d'onda delle due particelle (nel c.m.) prima e dopo l'urto, μ la loro massa ridotta $\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$, \vec{r} la distanza relativa, V il potenziale d'interazione. A prescindere dalla formula che compare entro l'integrale (che rappresenta appunto l'approssimazione di Born), il fattore fuori integrale ha un significato del tutto generale essendo legato alla densità degli stati finali, o, se si preferisce, all'operatore energia cinetica dell'eq. di Schroedinger

(2) cfr. Segrè, Nuclei e Particelle, p. 686

Jackson, D.F., Nuclear Reactions, p. 63

Born, Fisica Atomica, p. 456

ni difficilmente valutabile per lo meno in sede teorica

- le interazioni con i reticoli cristallini, se ve ne sono, (1) che sono sensibili per energie neutroniche comprese tra i 5 e gli 80 ~~me~~ meV, corrispondenti a lunghezze d'onda comprese tra i 4 e 1 \AA , cioè dello stesso ordine degli spazi interreticolari, e danno luogo a scattering coerente elastico (di Bragg), scattering coerente inelastico (con eccitazione fononica), scattering incoerente: tutti fenomeni per i quali sono possibili (1) formulazioni teoriche piuttosto precise, ma talmente complesse da rendere praticamente intrattabili gli integrali dell'eq. 1.7.

D'altra parte, alle energie termiche vengono a cadere i due principali vantaggi che ha la teoria del trasporto nei confronti dell'approssimazione diffusiva, cioè l'accutata considerazione delle anisotropie di scattering e delle variazioni di sezione d'urto in funzione dell'energia (nonchè delle correlazioni energetico-angolari).

Infatti, come è noto, (2) l'equazione della diffusione (monocinetica) può formalmente essere dedotta dall'equazione del trasporto come approssimazione P_1 , e anche l'equazione della diffu-

(1) si veda al riguardo un qualsiasi testo di Fisica dello Stato Solido o di Diffrazione dei Neutroni Lenti

(2) Massimo, The Physics of High-Temperature Reactors, p. 26
Boffi, Fisica del Reattore Nucleare, vol. 1 parte II, p; 236

sione dipendente dall'energia può essere dedotta dall'eq. del trasporto ammettendo la validità:

- dell'approssimazione P_1
- dell'equazione di "bilancio dettagliato" (1) (2)

$$\int \sum_{s_1} (\bar{E}' \rightarrow E) \bar{j}(rE') dE' = \int \sum_{s_1} (E \rightarrow E') \bar{j}(rE) dE' \quad (1.11)$$

Ora, come mostreremo nel cap. 2°, alle energie termiche, e più in generale alle basse energie (inferiori al keV), le sezioni d'urto sono isotropiche nel sistema del c.m., e anche nel sistema del lab per nuclei non troppo leggeri, e quindi, anche se il grado di anisotropia del flusso e della sezione d'urto non sono strettamente correlati, è tuttavia lecito attendersi che da sezioni d'urto isotrope (e mezzi isotropi, come per lo più accade), anche il flusso abbia un limitato grado di anisotropia e possa quindi essere descritto dall'approssimazione P_1 .

(1) Massimo, The Physics of HTR, p. 29

(2) In generale, il principio del bilancio dettagliato (detailed balance) è verificato quando vale la

$$|T_{\alpha\beta}|^2 = |T_{\beta\alpha}|^2 \quad (3)$$

cioè quando il module quadrato dell'elemento di matrice di transizione dal canale α al canale β è eguale al module quadrato dell'elemento di matrice di transizione dal canale β al canale α

(3) Williams, W.S.C., An Introduction to Elementary Particles, p.106
Segrè, Nuclei e Particelle, p. 428

Jackson, D.F., Nuclear Reactions, p. 55

Per quanto riguarda la 1.11, in base alla meccanica statistica si può dimostrare che:

- se il flusso termico è maxwelliano 1.13

- se $S(E) = \sum_s (E) = 0$ 1.14

(con S_s sorgente esterna e sezione d'urto macroscopica di assorbimento, all'energia E),

allora vale il principio di bilancio dettagliato (1)

$$\sum_s (E' \rightarrow E) \phi_n(E') = \sum_s (E \rightarrow E') \phi_n(E) \quad 1.15$$

che non coincide con la 1.11 (perchè $j(r,E) = -D(E) \nabla^2 \phi(r,E)$) 1.16

ma è press'a poco equivalente ad essa.

In conclusione: per un reattore termico l'equazione del trasporto (che in tal caso praticamente coincide con l'equazione di Boltzmann per i neutroni) va incontro a una notevole complessità formale che comporta una enorme difficoltà nella sua risoluzione numerica, e a causa delle incertezze teoriche e sperimentali non offre nemmeno un grado elevatissimo di accuratezza, mentre la approssimazione diffusiva, che presenta equazioni facilmente risolubili almeno numericamente, dà risultati abbastan-

(1) Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, p. 246

(2) Massimo, The Physics of HTR, p. 30

za attendibili anche se in ogni caso da prendere con cautela perchè comunque approssimati, nella misura in cui sono approssimate la P_1 , la 1.13, la 1.14.

Completamente diversa è invece la situazione in un reattore veloce. Qui, il maggior numero di fissioni (1) avviene ad energie superiori ai 100 KeV e l'energia media dei neutroni è (2) circa 1 MeV, onde è importante determinare con accuratezza la distribuzione spazio-energetico-temporale del flusso neutronico nella zona delle alte energie, mentre minore importanza assumono i neutroni nella zona intermedia e praticamente assenti sono quelli di energia inferiore all'eV.

Alle alte energie è del tutto inaccettabile l'approssimazione P_1 , a causa dell'anisotropia dello scattering (come vedremo nel ~~par~~ capitolo 2), mentre in entrambe le zone energetiche (alta e intermedia) è assolutamente non verificato il principio del bilancio dettagliato (come si può osservare da un qualsiasi diagramma di sezioni d'urto in funzione dell'energia), e così pure in entrambe tali zone energetiche è trascurabile il moto dei nuclei (poche decine di meV) di fronte alle energie dei neutroni che sono superiori di parecchi ordini di grandezza. L'unico problema è fornito dal

(1) Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, p. 113

(2) El-Wakil, Nuclear Reactor Energy Conversion, p. 277

(3) Massimo, The Physics of HTR, p. 30

l'allargamento delle risonanze il cui effetto è comunque assai minore che nel caso dei reattori termici e che vedremo nel par. 2.4 come possa essere approssimativamente trattato.

Si può quindi concludere che la equazione del trasporto, così come verrà scritta nel seguente paragrafo, costituisce un mezzo di calcolo del tutto accurato per lo studio, la progettazione e il controllo dei reattori veloci, senza tuttavia porre insormontabili difficoltà per la sua risoluzione numerica in computer adeguatamente grandi e veloci, quali quelli che debbono essere adoperati appunto per lo studio di impianti potenzialmente pericolosi e di altissimo costo come i nucleari.

Praticamente dedicato ai reattori veloci sarà quindi d'ora in avanti lo svolgimento del nostro lavoro.

1.3 . EQUAZIONE DEL TRASPORTO

Riprendiamo in considerazione l'eq. 1.7. In base a quanto osservato nel paragrafo precedente, cioè che in un reattore veloce i nuclei si possono con ottima approssimazione considerare fermi, possiamo porre nel primo integrale a primo membro

(1)

$$N_i(\vec{r}, \vec{u}; t) = N_i(\vec{r}, t) \delta(\vec{u}) \quad 1.17$$

e quindi (2)

$$\iiint_{\vec{u}_i} N_i(\vec{r}, t) \delta_i(\vec{v} \rightarrow \vec{v}', \vec{u}_i \rightarrow \vec{u}_i') / |\vec{v} - \vec{u}_i| d\vec{u}_i = N_i(\vec{r}, t) \delta_i(\vec{v} \rightarrow \vec{v}', \vec{u} \rightarrow \vec{u}') v \quad 1.18$$

- (1) Nell'eq. di Boltzmann la dipendenza temporale delle N_i è tenuta in conto attraverso il sistema di equazioni accoppiate 1.7, una per ogni i .

Nel nostro caso, le concentrazioni nucleari variano per due motivi:

- per reazioni nucleari, in conseguenza delle quali un nucleo di un isotopo si trasforma nel nucleo $Z \neq Z'$ di un altro isotopo (o in più nuclei)
- per variazione della densità massica del mezzo.

Del primo effetto - assai lento nel tempo - tengono conto i codici di burn-up; il secondo effetto ci è dato dalle equazioni della termocinetica

- (2) tutte le sezioni d'urto microscopiche (integrali e differenziali) non dipendono, nell'assunzione fatta di mezzo isotropo, dalla posizione, ma dipendono dalla temperatura, in con

è poi, integrando su \bar{v}' e su \bar{u}'_i , si ottiene:

$$-N(\bar{r}, t) \sum_i \iiint_{\bar{v}'} \iiint_{\bar{u}'_i} \iiint_{\bar{u}'_i} N_i(\bar{r}, t) \sigma_i(\bar{v}' \rightarrow \bar{v}, \bar{u}'_i \rightarrow \bar{u}'_i) / |\bar{v}' - \bar{u}'_i| d\bar{v}' d\bar{u}'_i d\bar{u}'_i =$$

$$= -vN(\bar{r}, t) \sum_i N_i(\bar{r}, t) \sigma_i(\bar{v})$$
1.19

mentre nel secondo integrale, ponendo similmente

$$N_i(\bar{v}, \bar{u}'_i, t) = N_i(\bar{r}, t) \delta(\bar{u}'_i) \quad 1.20$$

e quindi integrando su \bar{u}'_i :

$$\iiint_{\bar{u}'_i} N_i(\bar{r}, \bar{u}'_i, t) \sigma_i(\bar{v}' \rightarrow \bar{v}, \bar{u}'_i \rightarrow \bar{u}'_i) / |\bar{v}' - \bar{u}'_i| d\bar{u}'_i = N_i(\bar{r}, t) \sigma_i(\bar{v}' \rightarrow \bar{v}, 0 \rightarrow \bar{u}'_i) v'$$
1.21

e infine, integrando su \bar{u}'_i :

$$\frac{\partial N(\bar{r}, \bar{v}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J}(\bar{r}, \bar{v}, t) =$$

$$= -vN(\bar{r}, \bar{v}, t) \sum_i N_i(\bar{r}, t) \sigma_i(\bar{v}) + \sum_i \iiint_{\bar{v}'} v' N(\bar{r}, \bar{v}', t) N_i(\bar{r}, t) \sigma_i(\bar{v}' \rightarrow \bar{v}) d\bar{v}'$$
1.22

A questo punto, per pervenire alla equazione del trasporto nella sua forma più usuale, fisicamente più significativa e più atta ai successivi sviluppi, occorre fare ancora tre modifiche.

La prima consiste nello scrivere \bar{v} in coordinate sferiche, specificandone la direzione del vettore $\hat{\Omega}$, (che rappresenterà dunque la direzione di volo dei neutroni) e il modulo

% sequenza ~~è-essa~~ dell'allargamento che essa provoca nelle risonanze, e, attraverso la temperatura, dipendono dal tempo. Anche la variazione della temperatura col tempo è data dalle equazioni della termocinetica

con una quantità proporzionale al quadrato di v , cioè con l'energia (cinetica) E (1). Avremo quindi: (2)

$$N(\vec{r}, \vec{v}, t) \rightarrow N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \quad 1.23$$

e potremo quindi scrivere il termine di leakage (o di streaming)

(il 2° della 1.22) nella forma più comoda

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, \vec{v}, t) &\rightarrow \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \nabla \cdot \vec{v} N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \\ &= \nabla \cdot \vec{v} \bar{\Omega} N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \nabla \cdot \bar{\Omega} \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \bar{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \end{aligned} \quad 1.24$$

ove ovviamente

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = v N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \quad 1.25$$

è il flusso neutronico angolare, quantità che d'ora innanzi diverrà l'incognita alla cui determinazione dedicheremo l'intera prima parte.

Similmente

(1) non è il caso di introdurre correzioni relativistiche, in quanto, ad es.:

a 100 keV:	$\beta = 0.000212766$	$\gamma = 1.0001064$	
a 1 MeV	$\beta = 0.002125279$	$\gamma = 1.0010643$	1.26
a 10 MeV	$\beta = 0.032073262$	$\gamma = 1.0106433$	

(2) ovviamente $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \neq N(\vec{r}, \vec{v}, t)$, ma

$$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega} = N(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad 1.27$$

$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ è detta densità neutronica angolare

$$\sigma_1(\vec{v} \rightarrow \vec{v}') \rightarrow \sigma_1(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{\partial^2 \sigma_1(E')}{\partial E \partial \vec{\Omega}} \quad (1) \quad 1.28$$

sezione d'urto differenziale rispetto all'energia e all'angolo (finali), o, se si preferisce, "spettro energetico" (2) per la reazione in questione; tale quantità, moltiplicata per N_1 ed eseguita la sommatoria, è detta "kernel di trasferimento", mentre la

$$\sum_i N_i(\vec{r}, t) \sigma_1(\vec{v}) \rightarrow \sum_i N_i(\vec{r}, t) \sigma_1(E) \quad (3) \quad 1.29$$

è il kernel di rimozione.

La seconda modifica consiste nello scrivere un po' meglio il kernel di trasferimento. I neutroni al punto \vec{r} possono essere "trasferiti" dall'energia E' e dalla direzione $\vec{\Omega}'$ all'energia E e alla direzione $\vec{\Omega}$ in conseguenza di tre processi:

- scattering elastico
- reazioni anelastiche, tra cui in primo luogo lo scattering inelastico

(1) anche se in realtà si tratta di una derivata terza $\frac{\partial^3 \sigma}{\partial E \partial \vec{\Omega}}$, si usa scrivere $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \vec{\Omega}}$, così come ad es. si usa scrivere $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \vec{\Omega}}$ e non $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \vec{\Omega}}$, etc.

(2) il termine è della D.F. Jackson, op. cit., p. 2

(3) se il mezzo è isotropo (come generalmente accade e come da noi ammesso, le sezioni d'urto non dipendono dalla direzione iniziale

lastico e in secondo luogo reazioni poco probabili come la
(n,2n); le tratteremo formalmente tutte come scattering inelasti-
co

- fissione

Scriveremo dunque la 1.28 come

$$\frac{\partial \sigma_{\text{eff}}(E, T(H))}{\partial E \partial \bar{R}} + \frac{\partial \sigma_{\text{eff}}(E, T(H))}{\partial E \partial \bar{R}} + (1-\beta) \chi(E) D_0(E) \sigma_{f,i}(E', T(H)) \cdot \frac{1}{4\pi} \quad 1.30$$

ove

$$\beta = \sum_i \beta_i \quad \text{con } \beta_i = \text{frazione di ritardati emessi dal gruppo } i\text{-esimo}$$

$\chi(E)$ spettro dei neutroni pronti, cioè
densità di probabilità/unità di energia che un n sia e-
messo con energia E

$D(E')$ secondari di fissione all'energia E' cioè
numero di n emessi in media in seguito a fissione all'e-
nergia E'

$\sigma_{f,i}(E', T(H))$ sezione d'urto di fissione per il nucleo dell'isotopo i-
esimo

Non si sono introdotte - come viene fatto usualmente su tutti i
testi - le sezioni d'urto macroscopiche, in quanto si è preferi-
to fattorizzarle in una quantità dipendente dalla posizione (N_i)
e in una dipendente dall'energia ed eventualmente dall'angolo,
nonchè dalla reazione nucleare interessata. Ci sembra inoltre pri-
vo di significato fisico dare sezioni d'urto differenziali, me-
diate tra i vari isotopi presenti in un punto.

Il fattore $(1-\beta)$ della 1.30 implica di dover tener

conto dei progenitori di ritardati, il cui contributo è

$$\frac{\lambda}{4\pi} \sum_r \lambda_r \chi_r(\bar{E}) C_r(\bar{r}, t) \quad 1.31$$

ove λ è la costante di disintegrazione (s^{-1}) e $C_r(\bar{r}, t)$ la concentrazione del gruppo r-esimo di ritardati (nuclei/unità di volume). Tali concentrazioni obbediscono all'equazione: (1)

$$\frac{\partial C_r(\bar{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_r C_r(\bar{r}, t) + \beta_0 \sum_{r'} \int \int \int_{\bar{E}, \bar{r}'} v_r(\bar{E}') N_r(\bar{r}', t) \sigma_{r'}(\bar{E}') C(\bar{r}, \bar{E}', t) d\bar{E}' d\bar{r}' \quad 1.32$$

che conviene subito integrare e sostituire nella 1.31.

Ricordando che (2) l'equazione:

$$\frac{dy(x)}{dx} + f(x)y(x) + g(x) = 0 \quad 1.33$$

ha per soluzione:

$$y(x) = e^{-\int_a^x f(x') dx'} \left[y(a) - \int_a^x g(x') e^{\int_a^{x'} f(x'') dx''} dx' \right] \quad 1.34$$

con a costante arbitraria,

per confronto si vede subito che la 1.32 ha soluzione (con $a = 0$)

$$C_r(\bar{r}, t) = e^{-\lambda_r t} \left[C_r(\bar{r}, 0) + \int_0^t e^{\lambda_r t'} \beta_0 \sum_{r'} \int \int \int_{\bar{E}, \bar{r}'} v_r(\bar{E}') N_r(\bar{r}', t') \sigma_{r'}(\bar{E}') C(\bar{r}, \bar{E}', t') d\bar{E}' d\bar{r}' dt' \right] \quad 1.35$$

La terza modifica consiste nell'aggiungere il termi-

(2) Buzano, Lezioni di Analisi Matematica, p. 396

(1) anche le λ e β dipendono propriamente da E' , ma la loro variazione è piccola (3) ed è possibile dare un valore medio

(3) Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, p. 100

ne di sorgente $S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, che comprende

- la sorgente interna di n impressa dall'esterno (ad es. con un \dot{a} acceleratore)
- le fissioni spontanee
- altre eventuali sorgenti neutroniche

In genere viene considerata isotropa, ma ciò non è necessariamente vero, specie se le particelle accelerate hanno elevata energia, o se nel termine di sorgente si vogliono includere i raggi cosmici come fa il Davison! (1)

Possiamo quindi facilmente scrivere l'equazione del trasporto per i neutroni, nella sua forma integro-differenziale o prima forma (2), in presenza di ritardati.

Vogliamo prima però ricordare che:

- tutti gli integrali a secondo membro sono integrali definiti
- il loro range di integrazione è :

4π per la variabile angolare

per la variabile energetica a rigore sarebbe da 0 a ∞ ; in realtà, essendo il reattore veloce, l'"up-scattering" è nullo, quindi negli integrali di trasferimento il limite inferiore

(1) Davison, Neutron Transport Theory, p. 13

(2) Weinberg Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors,

re è E. Ciò comporta una complicazione in quanto si ottiene un'equazione di Volterra (del 2° genere) invece di una equazione di Fredholm (del 2° genere) (1); il limite superiore di integrazione è eguale all'energia max che hanno i neutroni nel reattore (ciò comporta la definizione di un valore di soglia, ad es. 10 o 17 MeV). In realtà nell'integrale di scattering il limite superiore d'integrazione energetica è anch'esso funzione del limite inferiore d'integrazione.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) + \bar{\Omega} \cdot \nabla \phi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) + \\
 & + \phi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) \sum_i N_i(\bar{r}, t) \sigma_i(E, T(H)) = \quad \text{eq. 1.36} \\
 & = \sum_i \int_{E'} \int_{\bar{\Omega}'} \phi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}', t) N_i(\bar{r}, t) \frac{\partial^2 \sigma_i(E')}{\partial E \partial \Omega} dE' d\bar{\Omega}' \\
 & + \sum_i \int_{E'} \int_{\bar{\Omega}'} \phi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}', t) N_i(\bar{r}, t) \frac{\partial^2 \sigma_i(E')}{\partial E \partial \Omega} dE' d\bar{\Omega}' \\
 & + \sum_i \frac{1}{4\pi} (1-\beta) \int_E \sum_{\bar{\Omega}'} \chi_i(E) \nu_i(E') \bar{\sigma}_p(E') N_i(\bar{r}, t) \int_{\bar{\Omega}'} \phi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}', t) dE' d\bar{\Omega}' \\
 & + \frac{1}{4\pi} \sum_r \sum_n \lambda_r e^{-\lambda_r t} \left[C_r(\bar{r}, 0) + \int_0^t e^{\lambda_r t'} \beta_r \right. \\
 & \left. \int_{E'} \int_{\bar{\Omega}'} \nu_i(E) N_i(\bar{r}, t) \bar{\sigma}_p(E') \phi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}', t) dE' d\bar{\Omega}' \right] \chi_r(E) + S(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t)
 \end{aligned}$$

(1) Arfken, Mathematical Methods for Physicists, p. 725

equazione che deve essere corredata dalle condizioni iniziali, supposte note:

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t=0) = C_r(\vec{r}, E=0) \quad \forall r \quad 1.37$$

e dalle condizioni al contorno (1):

- continuità del flusso all'interfaccia tra due mezzi (per ogni direzione che attraversi l'interfaccia):

$$\phi(\vec{r}+s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}, t+\frac{s}{v}) \quad \text{dev'esser funzione continua di } s \text{ per } r+s\vec{\Omega} \text{ appartenente all'interfaccia} \quad 1.38$$

- annullamento del flusso al contorno esterno del mezzo, per tutte le direzioni entranti verso l'interno, se all'esterno vi è il vuoto o un puro assorbitore:

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}_m, t) = 0 \quad \forall \vec{\Omega}_m \text{ rivolta verso l'interno} \\ r_s \text{ appartenente al contorno} \quad 1.39$$

Se all'esterno del mezzo vi è un debole scatteratore (ad es. aria, o la lamiera del reattore), o si applica la 1.39, che in tal caso dà un errore che potrebbe anche essere del tutto trascurabile, oppure il primo membro della 1.39 sarà diverso da zero ed eguale ad una opportuna distribuzione di flusso angolare, da determinarsi sperimentalmente e/o teoricamente:

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}_m, t) = f_{\text{scat}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}_m, t) \quad 1.40$$

(1) Davison, Neutron Transport Theory, p. 21

(2) Boffi, Fisica del Reattore Nucleare, parte II vol. 1°, p. 24

S E Z I O N I D ' U R T O
=====

2.1 SCATTERING ELASTICO: ANISOTROPIA POLARE

Nella equazione del trasporto 1.36 compaiono le sezioni d'urto integrali $\sigma(E)$ e le sezioni d'urto differenziali $\frac{d^2\sigma(E)}{d\Omega d\Omega'}$. Al di fuori della regione delle risonanze, le prime si possono ricavare abbastanza bene sperimentalmente e, sia per interpolare i dati che per incrementarne l'accuratezza, si può far uso di metodi teorici di provata affidabilità quali l'inserzione di un potenziale complesso (congruente coi dati sperimentali) nell'eq. di Schroedinger o in quella approssimata di Born (modello ottico, (1), dovuto a Bethe, 1940, e a Feshbach, Porter e Weisskopf, 1954), o con il modello ottico generalizzato (2). In ogni caso i risultati di tali calcoli e i dati sperimentali si trovano abbondantemente diagrammati su testi e riviste, e non resta quindi che affidarsi alle opere più recenti e autorevoli.

(1) Segrè, Nuclei e Particelle, p. 458

(2) Jackson, D.F., Nuclear Reactions, p. 114

Nella zona delle risonanze i dati sperimentali sono incerti, in particolare è difficile (1) valutare l'esatta altezza e larghezza delle risonanze a causa dell'effetto Doppler, onde saremo costretti a tornare su questo problema nel par. 2.4, per puntualizzare alcune questioni e per vedere come usare i dati sperimentali. Anche sulle risonanze si trovano comunque abbondanti dati sperimentali e diagrammi.

Ciò che invece non si trova tabulato su alcun testo sono le $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \Omega}(\bar{e})$. (2). Abbiamo visto che esse riguardano lo scattering elastico, lo scattering inelastico ed altre reazioni anelastiche assimilabili allo scattering inelastico. In questo paragrafo incominciamo col trattare lo scattering elastico.

Iniziamo col ricordare che una reazione si dice elastica quando la somma delle energie cinetiche delle particelle uscenti da una reazione è eguale (in ogni sistema di riferimento inerziale) alla somma delle energie cinetiche delle particelle entranti nella reazione, e che una reazione viene detta di scattering quando le particelle uscenti dalla reazione sono le stesse che le particelle entranti. Entrambe le cose non implicano poi

(1) Hughes, D.J., Harvey, J.A., Neutron Cross Section, United States Atomic Energy Commission, 1955, p. 33

(2) nei par. 2.1, 2.2, 2.3 prescindiamo dalla dipendenza dalla temperatura; ciò perchè essa influisce solo nella regione delle risonanze, ove lo scattering inelastico è assente, (segue a p. 27)

affatto che una particella abbia, dopo l'urto, la stessa energia cinetica che aveva prima dell'urto. (Ciò capita solo nel c.m., se interagiscono due sole particelle).

Poichè il neutrone è una particella quantistica (anche se a molti la cosa non piace), per studiarne l'interazione con i nuclei occorre usare i metodi della meccanica quantistica. Riportiamo ora uno dei metodi più generali e basilari, anche se non recente, per lo studio dello scattering, detto "sviluppo in onde parziali" o "analisi degli sfasamenti", che, proprio per la sua generalità e basilarietà, compare su tutti i testi - a livello non troppo elementare - di Fisica Quantistica e di Fisica Nucleare.

Il metodo poggia sulle seguenti ipotesi: (1)

- potenziale d'interazione a simmetria sferica 2.1
- e a range finito 2.2
- particelle collidenti entrambe senza spin (2) 2.3
- validità della meccanica quantistica non relativistica (3) 2.3'

La prima ipotesi sembrerebbe abbastanza ovvia nel ca

(1) ci baseremo principalmente su:

Williams, W.S.C., An Introduction to Elementary Particles, p. 67 e SG;
Jackson, D.F., Nuclear Reactions, p. 34 e seguenti

(2) Il caso in cui collidano tre o più particelle non ha interesse ai fini dei reattori nucleari. Nel nostro caso, inoltre, la particella incidente e scatterata sarà il neutrone, e il centro scatteratore sarà il nucleo

(3) segue a p. 27

SO che il centro scatteratore potesse esser considerato a tutti gli effetti puntiforme, e che cada invece in difficoltà allorchè il neutrone "penetra" entro il nucleo, a causa della deformazione del potenziale nucleare che viene in tal caso prodotta dal neutrone stesso; sembrerebbe inoltre che la prima ipotesi implichi la terza in quanto, in presenza di spin, compaiono nell'hamiltoniana del sistema (1) termini del tipo

$$\frac{3}{r^3} (\vec{S}_1 \cdot \vec{r})(\vec{S}_2 \cdot \vec{r}) - \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

(ove \vec{r} è la distanza delle due particelle e S il loro spin) che, per quanto scalari, non sono manifestamente a simmetria sferica.

Cionostante, vedremo nel paragrafo 4° che le formule di Breit-Wigner, ricavate nel 1936 in base al modello del "nucleo composto" (Bohr, 1936) possono essere dedotte anche dalle formule che ricaveremo in questo capitolo in base alle ipotesi suddette, per quanto evidentemente la 2.1 e la 2.3 siano inconciliabili col modello del nucleo composto. Ciò è una ulteriore prova della generalità dei risultati cui saremo condotti.

☞ segue da p. 25: e le sezioni d'urto differenziali rispetto all'angolo, a causa delle basse energie, del tutto isotrope. Il non esplicitare la dipendenza dalla temperatura non costituisce un'approssimazione, ma una coerenza coi testi di fisica nucleare

☞ segue da p. 26: di ciò si era già parlato a p. 17, nota 1. Per quanto propriamente lo spin sia un effetto relativistico, se ne può tenere bene conto con gli spinori

(1) Williams, W.S.C., Introduction to Elementary Particles, p. 29

Per quanto riguarda la 2.2, vedremo più avanti cosa essa significhi di preciso matematicamente, mentre nel prossimo paragrafo rimoveremo la 2.3.

Scriviamo dunque l'eq. di Schroedinger per gli stati stazionari (1) per un sistema a due corpi

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\vec{r}) - E \right] \psi = 0 \quad 2.4$$

ove ψ è la funzione d'onda stazionaria, \hbar la costante di Planck (divisa per 2π , $(1.0545919(80) \cdot 10^{-34}$ Js) (2), m_i la massa della particella i , V il potenziale, E l'autovalore energia totale $= \hbar\omega$, \vec{r}_1 e \vec{r}_2 le posizioni delle due particelle (ad es. nel sistema del lab.)

Definendo la posizione del c.m.:

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad 2.5$$

e il vettore distanza relativa delle due particelle

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad 2.6$$

(1) la funzione d'onda spazio-temporale sarà dunque:

$$\Psi = \psi e^{-i\omega t} \quad 2.7$$

(2) ParticleData Group, 1971, Physical and Numerical Constants, da Rev. Mod. Phys. 41, 375 (1969)

e trattando l'operatore differenziale ∇ come $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ 2.8

si perviene facilmente alla

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)} \nabla_0^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - E \right] \psi = 0 \quad 2.9$$

ove μ è la massa ridotta già definita dalla 1.9.

La 2.9 può essere spezzata in due parti, l'una delle quali

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)} \nabla_0^2 - E_0 \right] \psi = 0 \quad 2.10$$

rappresenta il moto traslazionale del c.m. rispetto al lab., e naturalmente non ci interessa, mentre l'altra

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - E \right] \psi = 0 \quad 2.11$$

descrive l'interazione tra le due particelle, nel sistema del c.m., e non è nient'altro che la consueta eq. di Schroedinger per gli stati stazionari. (ovviamente la E della 2.11 è eguale alla E della 2.9 meno la E_0 della 2.10). Su questa equazione punteremo ora la nostra attenzione, vedendo poi a fine paragrafo come passare dal sistema del c.m. a quello del lab.

Ponendo nella 2.11 $V=0$, si vede subito che se si scrive il laplaciano in coordinate ortogonali cartesiane, una autosoluzione della 2.11 è rappresentata da

$$\psi = e^{ikz} \quad 2.12$$

ove per comodità abbiamo scelto l'asse z nella direzione del moto

relativo delle due particelle (o meglio della particella incidente) e k , modulo del vettore d'onda, è dato da

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad 2.13$$

ricordando che se $V=0$, $E = E_{\text{cin}}$

Scrivendo invece il laplaciano in coordinate sferiche, appare evidente che una autosoluzione della 2.11 è data da una combinazione lineare di funzioni sferiche di Bessel e di armoniche sferiche, che può rappresentare un'onda sferica.

Ora, poichè nella 2.11 occorre porre delle condizioni al contorno, e poichè avevamo supposto (2.2) che il range del potenziale fosse finito, possiamo imporre che la soluzione della 2.2 abbia il comportamento asintotico (1) di un'onda piana entrante e di un'onda sferica uscente, e sia finita all'origine.

Avremo dunque:

$$\psi_{\text{in}} = e^{ikz} \quad 2.14$$

ora, se effettivamente il potenziale fosse ovunque nullo, avremmo:

$$\psi_{\text{out}} = \psi_{\text{in}}$$

e quindi le onde sferiche uscenti si ricomporrebbero coerentemente a formare un'onda piana, e il legame tra la combinazione di armoniche sferiche e funzioni sferiche di Bessel sarebbe dato

dall'eq. del Rayleigh (2)

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) J_l(kr) P_l(\cos\vartheta) \quad 2.15$$

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\vartheta \quad 2.16$$

ove appunto le $j_l(kr)$ sono le funzioni sferiche di Bessel di ordine l e i $P_l(\cos\vartheta)$ sono i polinomi di Legendre di ordine l .

Ora, ricordando che una espressione asintotica di (3)

$j_l(kr)$ è (4)

$$J_l(x) = \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \quad 2.17$$

si ha:

$$\psi_{out} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2iKr} P_l(\cos\vartheta) \quad 2.18$$

da cui, "accendendo" il potenziale, e ammettendo che il suo effetto sia di sfasare l'onda uscente (ricordare la 2.7) rispetto a quella entrante, sicchè non si ricombinano più a riformare un'on-

(1) per "asintotico" normalmente si intende "per $r \rightarrow \infty$ "; nella fattispecie la restrizione è assurdamente eccessiva, se si considera che il range delle forze nucleari è di pochi Fermi ($1 F = 10^{-15} m$).

(2) Arfkem, Mathematical Methods for Physicists, p. 557 e 768

(3) per $kr \gg l(l+1)/2$ (4) 2.19

(4) Arfkem, op. cit., p. 524

da piana, nonché quello di diminuire l'intensità dell'onda scattata elasticamente, perchè parte dell'onda incidente va a finire nei canali anelastici (η_0 parametro (reale) d'assorbimento), si ha

$$\psi_{out} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{P_l^{(2)}(0) e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2i k r} P_l(\cos \theta) \quad 2.20$$

e quindi:

$$\psi_{el} = \psi_{out} - \psi_{in} = \frac{i}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{P_l^{(2)}(0)}{2i} \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} P_l(\cos \theta) = \left(\frac{2i}{k} \right) \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} \quad 2.21$$

Ora, ricordando che, per definizione,

$$\sigma = \frac{\text{Immaginaria}/\text{Reale}}{I N A X} \quad 2.22$$

ove I = flusso incidente (particelle / m^2 s)

N = nuclei / m^3

A = area bersaglio

X = spessore bersaglio

e ponendo ponendo

$$NAX = 1 \quad 2.23$$

si ha

$$\bar{\sigma} = \frac{\int_S J_{out} d\bar{S}}{J_{in}} = \frac{\int_S J_{out} r^2 d\bar{\Omega}}{J_{in}} \quad 2.24$$

con

$$\bar{J} = \frac{\hbar i}{2\mu} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi] \quad 2.25$$

A questo punto ci conviene tornare sulla ipotesi 2.2 e osservare che la derivazione della 2.21 implica che il potenziale vada a zero più rapidamente di $1/r$ per grandi r (1), condizione che non è evidentemente soddisfatta nel caso di potenziale coulombiano (cosa che ovviamente non interessa i neutroni). In tal caso si può tuttavia scrivere (2)

$$f(r) = \frac{1}{\kappa} \sum_l (2l+1) e^{2i\delta_l} \frac{\eta_l e^{i2\delta_l} - 1}{2i} P_l(\cos\theta) - \frac{r}{2\kappa \mu^2 \frac{r^2}{2}} \exp\left[-\gamma \frac{r}{2} \left(\frac{\mu^2 r^2}{2}\right)^{-1/2}\right] \quad 2.26$$

con δ_l sfasamento coulombiano e $\gamma = \mu^2 \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 \kappa^2}$ parametro di Coulomb.

Fatta questa osservazione, possiamo calcolare ora le \bar{j} :

$$J_{\text{scat}} = v \quad 2.27$$

$$J_{\text{out}} = |f(\theta)|^2 \frac{v}{r^2} \quad 2.28$$

e dalla 2.24 $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = |f(\theta)|^2 \quad 2.29$

e quindi

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}} &= \iint_{\hat{\Omega}} |f(\theta)|^2 d\hat{\Omega} = \sum_l \frac{1}{\kappa^2} (2l+1)^2 \left| \frac{\eta_l e^{i2\delta_l} - 1}{2i} \right|^2 2\pi \frac{2}{2l+1} \\ &= \sum_l \frac{4\pi}{\kappa^2} (2l+1) \left| \frac{\eta_l e^{i2\delta_l} - 1}{2i} \right|^2 \quad 2.30 \end{aligned}$$

(1) Jackson, D.F., Nuclear Reactions, p. 38

(2) ibidem, p. 39

che per basse energie è semplicemente eguale a

$$\sigma_{el} \cong 4\pi a^2 \quad 2.31$$

con a "lunghezza di scattering"

Con calcoli analoghi (o, molto più velocemente, con un po' di intuizione) si ottiene:

$$\sigma_{tot} = \sum_l \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{1-\eta_l^2}{|2i|^2} \quad 2.32$$

$$\sigma_{el} = \sum_l \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{1-\eta_l \cos 2\delta_l}{2} \quad 2.33$$

A questo punto ci potrebbe esser rivolta la obiezione che noi cercavamo la $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \bar{\Omega}}$ (nel lab) e invece abbiamo trovato la $\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\Omega}}$ (nel cm). Rispondiamo a tale obiezione iniziando a notare che, in ogni sistema di riferimento, inerziale, la $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \bar{\Omega}}$ assume la forma

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \bar{\Omega}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\Omega}} \delta(E - E^*) \quad 2.34$$

ove la funzione deltiforme sta ad indicare che le particelle scatterate elasticamente ad un certo angolo $\bar{\Omega}$ possono avere una sola ben definita energia finale E^* che risulta funzione univoca dell'angolo di scattering e dell'energia iniziale E' . Nel lab, vale la relazione (1):

(1) Williams, M.M.R., The Slowing down and Thermalization of N., p. 321
 Boffi, Fisica del Reattore Nucleare, vol. 1 parte II, p. 180
 Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, p. 168

$$\bar{\epsilon}^* = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \left[(1+\alpha) + (1-\alpha) \cos \theta_{cm} \right] \quad 2.35$$

supposto, come avevamo supposto nel dedurre l'eq. del trasporto, che i nuclei siano fermi, e definito

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 \quad 2.36$$

con A numero di massa del nucleo.

Si può subito osservare che la 2.35 non è molto gradevole, in quanto è uno strano miscuglio di quantità valutate nel cm e di quantità valutate nel lab. Ad ogni modo esiste la relazione: (1)

$$\cos \theta_{lab} = \frac{1 - A \cos \theta_{cm}}{(1 + 2A \cos \theta_{cm} + A^2)^{1/2}} \quad 2.37$$

$$\cos \theta_{lab} = \frac{\gamma + \cos \theta_{cm}}{(\gamma^2 + 2\gamma \cos \theta_{cm} + 1)^{1/2}} \quad (2) \quad 2.38$$

che danno una forma alquanto involuta alla 2.35. Sia per tale motivo, sia per un'altra ragione più profonda saremo costretti, nel cap. 3°, a modificare la forma della 2.34. Comunque per ora riteniamola valida (effettivamente essa è valida, ha il solo difetto di essere scomoda). Essa ci mostra che, essendo la funzione delforme nota

(1) Williams, MMR, op. cit., p. 321

Boffi, op. cit., p. 182

Lamarsh, op. cit., p. 30

(2) Jackson, BrF, op. cit., p. 5 le 2.38 e 2.39 valgono sempre; la 2.37 solo per scattering elastico. Per γ vedi oltre

dalla 2.35 e seguenti, tutto quel che ci resta da fare è calcolare la $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}$ nel lab. Ma la $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{lab}$ è legata alla $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{cm}$ dalla relazione (1):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{lab} = \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{cm} \frac{(r^2 + 2\gamma \cos \vartheta_{cm} + 1)^{3/2}}{|1 + \gamma \cos \vartheta_{cm}|} \quad 2.39$$

ove γ è il rapporto tra la velocità nel lab del centro di massa, valutata nel lab, e la velocità finale della particella scatterata, valutata nel cm. Nel caso di scattering elastico e nucleo fermo,

$$\gamma = 1/A$$

Mostrato così che la conoscenza della $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{cm}$ ci porta facilmente alla conoscenza della $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{lab}$, riscriviamone l'espressione esplicita in base alle 2.21 e 2.29:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{cm} = \left| f(\vartheta) \right|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_l (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} P_l(\cos \vartheta) \right|^2 \quad 2.40$$

A questo punto possiamo osservare molte cose interessanti:

1) la 2.40 dipende dall'angolo polare ϑ ma non dall'angolo azimutale φ : onde possiamo enunciare il seguente risultato fondamentale: se entrambe le particelle sono senza spin, nel cm la distribuzione angolare delle particelle scatterate è isotropa rispetto all'angolo azimutale, può essere anisotropa rispetto all'angolo polare

2) anche la relazione 2.39 tra la $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{cm}$ e la $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{lab}$ è

(1) Jackson, D.F., op. cit., p. 5
Lamarsh, op. cit., p. 30

dipende solo dall'angolo polare ϑ e non dall'angolo azimutale ϕ .
 Considerando anche che $Y_{lm} = Y_{l, -m}$, possiamo affermare che l'enun-
 ciato della 1) è valido anche per il lab.

3) anche la funzione del tipo della 2.34 è funzione solo dell'an-
 golo polare, quindi quanto detto al punto 1) si può ripetere per
 quanto riguarda la $\frac{\partial \psi}{\partial \Omega} \Big|_{lab}$

4) le $\frac{\partial \psi}{\partial \Omega} \Big|_{lab}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial \Omega} \Big|_{lab}$, in quanto funzioni dell'angolo ϑ ,
 possono certamente essere sviluppate in una serie infinita (o appros-
 simate da una serie finita!) di polinomi di Legendre, i quali, in
 quanto autosoluzioni di una equazione autoaggiunta, godono delle
 proprietà di completezza e mutua ortogonalità.

5) la 2.40 non è però una semplice sommatoria di termini, ma il
 prodotto di due sommatorie. Perché questa complicazione? Perché nel
 la 2.40, interpretata quantisticamente, l non è un semplice indice
 di sommatoria, ma un numero quantico, caratterizzante il momento an-
 golare orbitale. Termini appartenenti a diversi l si dicono apparte-
 nenti ad onde diverse (dove il nome di "sviluppo in onde parziali");
 le onde corrispondenti ad $l = 0, 1, 2, 3$, vengono dette, rispettiva-
 mente, con notazione spettroscopica, onda s, onda p, onda d, onda f.
 Si può notare che la $\frac{\partial \psi}{\partial \Omega} \Big|_{lab}$ dipende dall'interferenza di onde di-
 verse, mentre la $\bar{\psi}$ somma il contributo dei diversi termini, senza
 interferenza.

6) il lettore attento avrà notato che all'inizio della trattazione avevamo usato il simbolo $\sum_{l=0}^{\infty}$; più avanti abbiamo cominciato con lo scrivere semplicemente $\sum_{l=0}$: questa modifica non è dettata da ragioni di comodità, ma da ragioni fisiche più profonde: infatti, se da un punto di vista strettamente matematico è necessario, per ragioni di completezza, estendere la sommatoria fino all' ∞ , da un punto di vista fisico (e ingegneristico) è assurdo estendere tale sommatoria fino all'infinito se i coefficienti di tale sommatoria sono tutti identicamente nulli (o trascurabilmente piccoli), eccetto i primi pochi. Anzi, come vedremo tra poco, solo il primo termine ($l=0$) è non nullo, per gran parte del range energetico interessante i reattori nucleari. Ciò è molto importante, perchè una sommatoria che si estende solo ai primi quattro o cinque termini, invece che a duecentomila, permette di lavorare meglio sia a noi che al calcolatore che ai fisici sperimentali.

7) la ragione per cui la sommatoria si estende solo ai primi pochi termini si può comprendere in base al seguente ragionamento semi classico:

Classicamente il momento angolare della particella incidente rispetto al centro scatteratore è dato dal prodotto della sua quantità di moto \vec{p} per la distanza b della retta d'azione di \vec{p} dal centro scatteratore. b è detto parametro d'urto. Quantisticam

mente, il modulo del momento angolare orbitale è dato da

$$\hbar \sqrt{l(l+1)} \quad 2.41$$

Ora, possiamo considerare che il n interagisca col nucleo solo se $b \leq R$, con R raggio del nucleo, dato dalla formuletta:

$$R = 1.2 + 1.5 A^{1/3} \quad 2.42'$$

Otteniamo quindi la seguente disequazione:

$$l(l+1) \leq p R / \hbar \quad 2.42$$

il cui secondo membro è tabulato nella tabella 2 per alcuni A e per alcune energie significative (scelto il valore 1.5 nella 2.41')

8) a causa però del modulo quadrato che compare nella 2.40 e del fattore che compare nella 2.39 si può affermare che nella $\left. \frac{15}{v \Omega} \right|_{A, b}$ comparirà qualche termine in più rispetto a quelli previsti dalla tabella $l_i = p - 1$. Più precisamente, osservando che $v_{L, a}^2$ e $v_{L, b}^2$ tendono a coincidere al crescere di A, anzi praticamente coincidono per A non troppo piccolo (in un reattore veloce il materiale più leggero è il sodio che ha $A = 23$) (cfr. tab. 3), si ha che se nella reazione intervengono le prime L onde, la $\left. \frac{15}{v \Omega} \right|_{A, b}$ sarà un polinomio di ordine $2(L+1)$ in $\cos^2 \theta_{L, a}$, e—simmilmente anzi, di ordine $2L+1$, perchè il coefficiente del termine di grado più alto è trascurabilmente piccolo rispetto agli altri (altrimenti sarebbe presente anche l'onda $L+1$), e così pure sarà $\left. \frac{15}{v \Omega} \right|_{A, b}$ un polinomio di grado $2L+1$

in $\cos \frac{\pi}{2} \delta$, e così pure $\frac{\partial^2 \sigma(\theta, E)}{\partial \theta^2 \partial E}$.

Non è un risultato di scarso pregio l'esser riusciti a predeterminare, per ogni elemento e per ogni energia, in quanti termini di una serie finita di Legendre possiamo sviluppare le sezioni d'urto differenziali rispetto all'angolo e all'energia.

9) il valore numerico della 2.40 è indeterminato nella misura in cui è indeterminato lo sfasamento δ_0 ; ciò non toglie che i coefficienti dello sviluppo in serie di Legendre si possano ricavare facilmente con le cosiddette "tecniche di estrazione" non appena si abbiano risultati sperimentali appena decenti, e che lo sviluppo formale e le conseguenze teoriche esposte in questo paragrafo siano di grande aiuto nell'incrementare la precisione dei dati sperimentali; oltre a ciò, $|e^{2i\delta_0}| = 1$ e quindi viene stabilito il valore max di $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}$ e di σ . A conti fatti, si può notare che nelle risonanze più alte dei nuclei pesanti si arriva molto vicino a tale valore max, che è di alcune centinaia di migliaia di barn alle energie e per i nuclei in questione, per l'urto con neutroni.

Ci si permetta di notare che questa è una ulteriore dimostrazione dell'efficacia del metodo esposto in questo paragrafo.

2.2 SCATTERING ELASTICO: ANISOTROPIA AZIMUTALE

La principale critica che si può muovere alla trattazione svolta nel paragrafo precedente è che essa si riferisce a particelle senza spin, mentre i n hanno spin $\frac{1}{2}$ e in generale anche i nuclei hanno spin diverso da zero.

In questo paragrafo ci proponiamo di mostrare che la presenza dello spin complica notevolmente le cose e non porta a risultati apprezzabilmente diversi da quelli ottenuti nel paragrafo precedente, per l'urto n -nucleo alle energie in questione e in un sistema statistico come un reattore nucleare.

~~In un sistema a molte particelle, quando~~

Iniziamo dal caso più semplice, cioè che il n , con spin $\frac{1}{2}$, urti un nucleo senza spin.

In un caso del genere si può dimostrare (1) che i seguenti operatori

$$j^2 \quad j_z \quad l^2 \quad s^2 \quad 2.43$$

commutano con l'hamiltoniana del sistema, e che quindi si conservano

$$j \quad j_z \quad l \quad s \quad 2.44$$

possono invece mutare le componenti z di l e di s : più precisamente si avrà hanno i seguenti due casi:

(1) Williams, W.S.C., op. cit., p. 29

$$\Delta s_z = 0 \quad \Delta l_z = 0 \quad \text{spin - non flip} \quad 2.45$$

$$\Delta s_z = \pm 1 \quad \Delta l_z = \mp 1 \quad \text{spin - flip} \quad 2.46$$

in quanto appunto la 2.46 significa che l'orientazione dello spin cambia, a spese del momento angolare orbitale.

Nel paragrafo precedente, avevamo considerato che la particella incidente fosse rappresentata da un'onda piana e^{ikz} ; ora la particella incidente è provvista di spin, e quindi sarà caratterizzata dal prodotto dell'autofunzione orbitale e^{ikz} per la autofunzione spinoriale $\chi(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$, ove lo spinore χ è definito dalle due seguenti matrici colonna

$$\chi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2.52 \quad 47$$

Scriveremo quindi l'eq. di Rayleigh 2.25 nella forma

$$e^{ikz} \chi\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = (4\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1)^{\frac{1}{2}} J_l(kr) Y_l^0(\theta) \chi\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) \quad 2.48$$

in quanto ci è più utile lavorare con le armoniche sferiche $Y_l^m(\theta, \varphi)$ che sono autofunzioni del momento angolare orbitale, e godono della proprietà di ortonormalità, che non i polinomi di Legendre, che sono ortogonali ma non ortonormali.

Ora, in base alle relazioni di composizione dei momenti angolari, che sono sintetizzate dai coefficienti di Clebsch-Gordan (1), coefficienti che non riportiamo perchè dovremmo anche spiegarne il significato, si ha che:

(1) Williams, W.S.C., op cit., p. 509

$$\begin{aligned}
 Y_c^{(l, m)}(\theta, \varphi) \chi\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) &\equiv \frac{(l+1)}{(2l+1)} Y_c^{(l, m)}(\theta, \varphi) \chi\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) + \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{2l+1} Y_c^{(l, m)}(\theta, \varphi) \chi\left(\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\right) \\
 &+ \frac{l}{2l+1} Y_c^{(l, m)}(\theta, \varphi) \chi\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) - \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{2l+1} Y_c^{(l, m)}(\theta, \varphi) \chi\left(\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

Considerando dunque che la particella incidente può avere lo "spin-up" (+) o lo "spin-down" (-), ci converrà ribattezzare la quantità $f_{\pm}(\theta, \varphi)$ della 2.21 con $f_{\pm}^{(+)}(\theta, \varphi)$ o con $f_{\pm}^{(-)}(\theta, \varphi)$ secondo che appunto la particella incidente abbia spin up o spin down. Abbiamo inoltre, come si vede, incluso la possibilità che la f dipenda da φ . Con un calcolo del tutto analogo a quello che ci aveva portato alla 2.21, si ottiene:

$$f_{\pm}(\theta, \varphi) = \sum_l \left\{ \left[(A_{l+}) A_{l+} + (A_{l-}) A_{l-} \right] P_l(\cos \theta) \chi\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) \pm (A_{l+} - A_{l-}) P_l^{(\pm 1)}(\cos \theta) e^{\pm i\varphi} \chi\left(\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\right) \right\}
 \tag{2.50}$$

$$\text{con } A_{l\pm} = \frac{y_{l\pm} \exp 2i\delta_{l\pm} - 1}{2i\kappa}
 \tag{2.51}$$

ove $P_1^m(\cos \theta)$ è il polinomio di Legendre associato. Notare che $m = l_2$. (In realtà, a causa della conservazione della parità (l'urto neutrone nucleo è una interazione forte e come tale conserva la parità) è possibile dimostrare che $f_+ = f_-$ (1). Di ciò non teniamo conto in quanto, da un punto di vista formale, complica, invece di semplificare, le cose).

(1) Williams, W.S.C., op. cit., p. 75

Per calcolare la $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}$ è ora necessario determinare in quale proporzione le particelle del fascio incidente abbiano lo spin up e in quale lo spin down. Chiamate $|a|^2$ e $|b|^2$ le suddette proporzioni (non ci addentriamo nel problema della determinazione di a e di b ; ricordiamo solo che $|a|^2 + |b|^2 = 1$), si ha che:

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \right|_{cm} = \left| a f_+(z, \theta) + b f_-(z, \theta) \right|^2 \quad 2.52$$

Una trattazione più elegante e più generale di quest'ultimo problema si potrebbe fare introducendo la matrice densità, ma ce ne asteniamo: riportiamo solo i risultati che se ne ottengono: (per fissare le idee ammettiamo, e conformemente al fatto che ci occupiamo dell'urto neutrone-nucleo, che le particelle incidenti siano a spin $\frac{1}{2}$ e che il bersaglio sia di particelle non senza spin: la situazione inversa è ovviamente del tutto analoga):

- se il fascio di particelle incidenti è polarizzato, nel senso che esiste una direzione preferenziale per lo spin, allora il fascio di particelle scatterate mostrerà una anisotropia azimuthale;
- se il fascio di particelle incidenti non è polarizzato, nel senso che non esiste una direzione preferenziale per lo spin, allora il fascio di particelle scatterate è azimuthalmente isotropo, ma risulta polarizzato, sicchè se incontra un successivo bersaglio, si avrà di nuovo anisotropia azimuthale.

A questo punto, tornando a un reattore nucleare, pos

siamo fare due considerazioni:

- i neutroni di fissione non c'è alcuna ragione per cui debbano essere polarizzati, quindi al primo urto verranno scatterati isotropicamente (rispetto all'angolo ϕ), ne usciranno polarizzati e al secondo urto saranno scatterati in modo anisotropo. Che cosa succederà nei successivi urti? Per rispondere a questa domanda ci conviene osservare la fondamentale differenza fra angolo polare e angolo azimuthale: il primo è basato sulla direzione di moto della particella incidente, onde se un neutrone viene scatterato in prevalenza in avanti, e conserva questa tendenza anche nei successivi urti, ha buona probabilità di scappare in fretta dal reattore, dopo pochi urti; se invece un neutrone viene scatterato di preferenza all'indietro, continua ad andare avanti e indietro e ha poche probabilità di uscire dal reattore. Invece l'angolo azimuthale viene stabilito in modo più arbitrario, ad es. assumendone l'origine sul piano di scattering, (determinato dalla direzione di incidenza e di scattering); al successivo urto tale piano in generale ruota, e così pure ai successivi urti, onde anche una forte anisotropia azimuthale tende statisticamente a spegnersi

- in realtà però l'anisotropia azimuthale è minima, perchè come abbiamo visto essa dipende dall'interazione spin-orbita, che è un effetto magnetico, e come tale cresce al crescere della velocità

relativa. Più precisamente, esiste nell'hamiltoniana un termine proporzionale ad $\vec{l} \cdot \vec{s}$, ma, come detto nel paragrafo precedente, $l = 0$ o a qualche piccolo intero. In effetti, diagrammi che mostrano effetti di anisotropia, come quelli su (1), sono ricavati a energie di due decadi superiori a quelle massime usuali in un reattore sia pur veloce.

Nel caso di urto tra particelle entrambe dotate di spin, le cose si complicano. Infatti, nel caso più semplice, cioè che entrambe le particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$, esisteranno quattro possibili stati iniziali, e quattro possibili stati finali, quindi la matrice che, operando sugli stati iniziali, dà gli stati finali, sarà 4×4 , (1), cioè a sedici elementi, in generale complessi, e richiederà la sperimentale valutazione di 32 quantità reali; valutazione che non è affatto facile, perchè ci sarà un sacco di ambiguità; e anche se con tutta una serie di esperimenti diversi è teoricamente possibile venire a capo di tali ambiguità, in realtà, alle energie in questione, le anisotropie sono così piccole che le incertezze nei dati sperimentali sono elevatissime e non c'è alcuna speranza di determinare con una sia pur minima accuratezza i coefficienti della suddetta matrice.

(1) Segrè, Nuclei e Particelle, p. 410

(2) Jackson, D.F., *op. cit.*, p. 46

Se poi consideriamo nuclei con elevato spin, non si può più trascurare la perturbazione che il neutrone crea nel potenziale nucleare, e anche il modello teorico diventa incerto e complicato. Del resto anche le formule ricavate in questo paragrafo, se venissero inserite nella equazione del trasporto, creerebbero grossi guai.

Non ci resta quindi che accettare l'ipotesi - ipotesi accettata piuttosto acriticamente dai reattoristi - che la sezione d'urto differenziale per lo scattering elastico sia indipendente dall'angolo azimuthale, ipotesi che in questo paragrafo abbiamo visto abbastanza ben fondata.

Se proprio poi si rilevasse sperimentalmente ~~una~~ che la $\frac{\partial \Sigma}{\partial \Omega}$ mostra una anisotropia azimuthale, potremo svilupparla in armoniche sferiche invece che in polinomi di Legendre. Ciò modifica appena "simbolicamente" la nostra trattazione, nel senso che ove, nella nostra trattazione, sarà indicato un pol. di Legendre, ivi bisogna sostituire le armoniche sferiche con lo stesso l.

Però a

$$\left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \Omega} \right|_{\text{lab}} = \sum_l a_l P_l(\cos \theta_{\text{lab}}) \quad 2.53$$

sostituiranno la

$$\left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \Omega} \right|_{\text{lab}} = \sum_l \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \quad 2.54$$

2.3 REAZIONI ANELASTICHE

La $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}$ per una qualsiasi reazione è formalmente identica alla 2.40: (1)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}} = \frac{\pi}{K_{\alpha}^2} \left| \sum_{l, l'} i^{l-l'} (2l+1)^{1/2} Y_{l, l'}(\theta_{\beta}, \phi_{\beta}) (S_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right|^2 \quad 2.55$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ indicano rispettivamente i canali di ingresso e di uscita della reazione, l, l', λ, ν sono i numeri quantici degli stati iniziale e finali, $S_{\alpha\beta}$ l'elemento della matrice di scattering, che, moltiplicato per l'ampiezza dell'onda incidente, denota l'ampiezza della probabilità della reazione tra il canale α e il canale β , che sono i canali $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ particolarizzati allo stato quantico l, l', ν .

Per quanto riguarda l'angolo ϕ valgono le stesse considerazioni fatte nel paragrafo precedente, mentre per quanto riguarda l'angolo θ osserviamo sperimentalmente che le distribuzioni angolari sono assai più isotrope che nello scattering elastico, cioè nello sviluppo in onde parziali compaiono molto meno termini di quanto previsto dalla 2.42. Ciò si può spiegare in base alla teoria del nucleo composto, in base alla quale il n incidente si unisce al nucleo per dare appunto il nucleo composto, che poi decade dopo che il n ha smemorizzato la direzione d'incidenza. In realtà il modello del nucleo composto spiega solo l'isotropia (nel cm)

(1) Jackson, D.F., op. cit., p. 53

della sezione d'urto differenziale, e non le anisotropie che si riscontrano a energie sufficientemente alte. Piuttosto c'è da considerare la barriera del momento angolare, che è proporzionale a k^{2l} .

Si può dunque concludere, con un ragionamento analogo a quello fatto nel par. 2.1, che anche la $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \Big|_{cm}$ si può sviluppare in polinomi Legendre (o in armoniche sferiche se proprio se ne dimostrasse l'anisotropia azimuthale). Occupiamoci ora della $\frac{\partial \sigma}{\partial E \partial \Omega}$, limitandoci, come già preannunciato, allo scattering inelastico.

Fisicamente, scattering inelastico significa che il nucleo viene portato ad un livello quantico eccitato, di energia E_q al di sopra dello stato fondamentale, mentre il n viene scattato (nel cm) con una energia finale $E_f = E_{in} - E_q \frac{A}{A+1}$ 2.56

Ora, ogni livello quantico ha una energia ben definita (la larghezza intrinseca del livello energetico è trascurabile rispetto a E_q), e quindi potremmo scrivere:

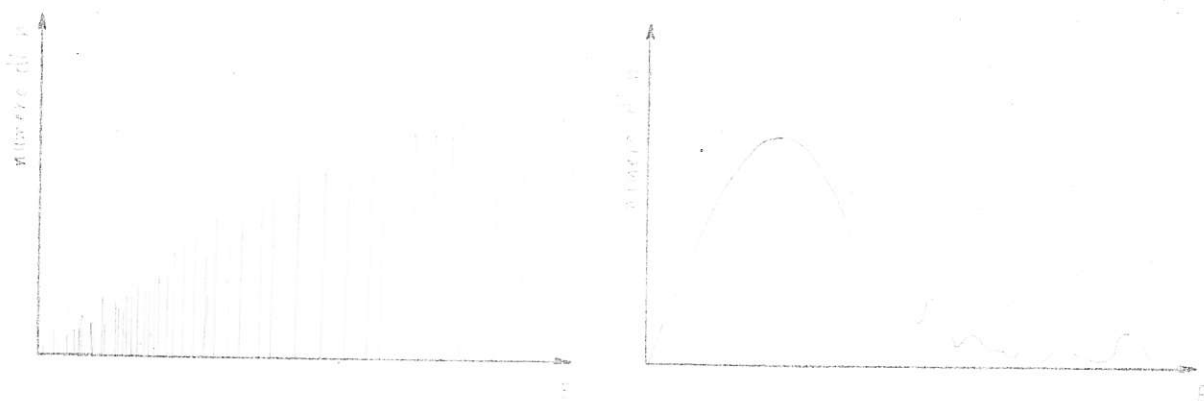
$$\frac{\partial \sigma}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{cm} = \frac{\partial \sigma}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{cm} \delta(E - E_f) \quad 2.57$$

e ancora

$$\frac{\partial \sigma}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{cm} = \sum_l a_l(E) P_l(\cos \theta) \delta(E - E_f) \quad 2.58$$

formula che è del tutto adatta agli sviluppi del cap. 3°.

La critica che si può fare a tale formula è che non tutte le quantità in essa presenti possono essere calcolate sperimentalmente, perchè in un nucleo pesante i livelli energetici sono così stretti e numerosi da formare quasi un continuo. Si osservino al riguardo i due diagrammi, qualitativi, tratti da (1):



Come si vede, i n inelasticamente scatterati hanno una distribuzione energetica quasi-maxwelliana. Ciò ha portato Weisskopf ad elaborare il cosiddetto "modello ad evaporazione" che, spiegato in dettaglio su (1), si può brevemente condensare nella formula (2) (3):

$$\sigma(E' \rightarrow E) = \sigma_{in}(E') \frac{E}{T^2} e^{-E/T} \quad 2.59$$

ove T è chiamata da (1) "temperatura neutronica" e da (2) e da (3) "temperatura nucleare". La denominazione di "temperatura" dipende comunque dal fatto che la sua relazione con la densità dei

-
- (1) Blatt-Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, p. 365
 (2) Williams, M.M.R., The slowing down and thermalization of n ., p. 331
 (3) Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, p. 60

livelli energetici e con la loro energia è formalmente la stessa che la relazione termodinamica tra temperatura, entropia e calore.

Il problema è però di determinare la T che compare nella 2.59. Al riguardo il Williams (1) riporta la formula suggerita, nel 1955, da Okrent:

$$\sigma(E' \rightarrow E) = \sigma_{in}(E') \frac{E C(E) e^{-E/T}}{\int_0^{E'} E C(E) e^{-E/T} dE} \quad 2.60$$

$$C(E) = \begin{cases} 1 & E > 0.5 \text{ MeV} \\ (15/E)^{1/2} & E \leq 0.5 \text{ MeV} \end{cases}$$

$$T = 1 \text{ MeV}$$

mentre lo stesso Okrent, Moldauer e Yiftah riportano (2) una formula suggerita dallo stesso Weisskopf: (il quale però non la cita nel suo già citato testo):

$$\sigma(E' \rightarrow E) = \sigma_{in}(E') \exp\left(-E / \frac{2}{B} \sqrt{E'}\right) \quad 2.61$$

$$B \approx 0.62 \sqrt{A}$$

Ammettono però che tale formula comporta errori di circa il 25 % ed è difficile da integrare, una volta introdotta nel Kernel di trasferimento. A maggior ragione le stesse considerazioni ci sembra valgano per la 2.62.

Considerando quindi che l'energia di soglia per gli

(1) Williams, M.M.R., The Thermalization and Slowing Down of N., p. 331

(2) S. Yiftah, D. Okrent, P.A. Moldauer, Fast Neutron Cross Section, p. 48

scattering inelastici è a circa 100 keV (1) e che in un reattore veloce il rallentamento avviene in prevalenza per gli scattering inelastici (2), ci sembra opportuno determinare una relazione per la $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{in}$ altrettanto accurata che la 2.34.

A tal fine iniziamo con lo scrivere:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{in} = \sum_i a_i(E) P_i(v) \delta(E - E') \quad 2.62$$

ove la $a_i(E')$ è un'osservabile sperimentale, e la $E^{\#}$ si determina in base al seguente ragionamento: usiamo le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso. Quest'ultima è una equazione vettoriale, corrispondente a tre eq. scalari, ma in realtà, con una scelta opportuna, possiamo limitarci a due equazioni scalari. Avremo quindi tre eq. nelle 4 incognite v'_x v'_y V'_x V'_y (v' velocità finale del n, V' velocità finale del nucleo), sistema che ammette infinite soluzioni in quanto l'angolo di scattering è indeterminato: otteniamo così anche la relazione fra energia finale del n ed angolo di scattering).

Concludiamo con l'osservare che con il nostro metodo non è necessario conoscere tutti i livelli energetici eccitati e le relative sezioni d'urto, ma conoscerne un certo numero in modo che i risultati siano globalmente, nell'ambito di ciascun gruppo energie

(1) Hughes, D.J., Neutron Cross Sections, p. 79

(2) Corno, S.E., Introduzione ai metodi di calcolo per i reattori veloci, p. 7

tico, consistenti con i dati sperimentali; all'uopo ci si può anche servire del modello ad evaporazione di Weisskopf, perchè è molto diverse ricavarci una volta per tutte, in base alle 2.60 e 2.61 o altre ancora più accurate, le $\sigma(E \rightarrow E)$ e da esse le $\bar{\sigma}_q(E \rightarrow E)$, in modo che le $\bar{\sigma}_q$ costituiscano un'accurata interpolazione delle $\bar{\sigma}$, ovvero introdurre l'esponenziale nelle equazioni a multigruppi che deriveremo nel par. 3.3, creando notevoli complicazioni sia al programmatore che al calcolatore; mentre una somma di un numero anche elevato di funzioni deltiformi del tipo 2.62 è trattabile con tutta facilità, in tempi brevissimi, sia dal programmatore che dal calcolatore.

Vogliamo ricordare che questo probabilmente noioso capitolo non è una frettolosa dissertazione di fisica quantistica, fine a se stessa, ma ci serve a valutare l'accuratezza fisica dei metodi che da un punto di vista puramente operativo ci sembrano più efficienti per un'accurata risoluzione numerica dell'eq. del trasporto e in definitiva per un responsabile progetto di un reattore nucleare.

Notiamo infine che la 2.62 è diversa dal modello suggerito da Volkin nel 1954 e riportata dal Williams a p. 332. (1)

(1) Williams, M.M.R., op. cit., p. 332

2.4 RISONANZE

Come avevamo preannunciato, le formule di Breit e Wigner (1936) (1) (2) possono essere facilmente dedotte dalle formule del par. 2.1.

Si ponga infatti, scritto:

$$\frac{e^{2i\delta} - 1}{2i} = \frac{1}{\text{ctg } \delta - i} \quad 2.63$$

$$\text{ctg } \delta = \frac{E - E_R}{\Gamma/2} = \varepsilon \quad 2.64$$

$$\Gamma = \Gamma_{el} + \Gamma_{\text{non}} \quad 2.65$$

$$\Gamma_{el} / \Gamma = x \quad 2.66$$

$$\Gamma_{\text{non}} / \Gamma = 1 - x \quad 2.67$$

$$\frac{\eta e^{2i\delta} - 1}{2i} = x \frac{e^{2i\delta} - 1}{2i} \quad 2.68$$

ove Γ è la larghezza della risonanza, E_R l'energia di picco, e gli altri sono tutti parametri definiti dalle formule suddette. Si ottiene quindi, (3), introducendo il fattore di spin, che nelle successive chiameremo g (Landè g factor)

(1) Segrè, op. cit., p. 436, 441, 454

(2) Lamarsh, op. cit., p. 43 e 63

(3) Willimas, W.S.C., op. cit., p. 120

$$\sigma_{el}^{(s)} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{2J_s + 1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{x^2}{\xi^2 + 1} \quad 2.69$$

$$\sigma_{reg}^{(s)} = \frac{4\pi}{k^2} g \frac{x(1-x)}{\xi^2 + 1} \quad 2.70$$

$$\sigma_{tot}^{(s)} = \frac{4\pi}{k^2} g \frac{x}{\xi^2 + 1} \quad 2.71$$

Ora, sia il Lamarsh che il Segrè fanno considerazioni varie su tali formule, presupponendo una semplice dipendenza di σ dall'energia che si mostra sia sperimentalmente che teoricamente (1) che non è affatto verificata. In particolare poi non è assolutamente accettabile la formula proposta da (2), (3), (4), che si basa sulla teoria del nucleo composto,

$$\sigma_s(E)_{tot} = 4\pi \chi_0^2 g \left| \frac{\Gamma_0/2}{E - E_0 + i\Gamma/2} + \frac{R}{\chi_0} \right|^2 + 4\pi(1-g)R^2 \quad 2.72$$

che considera lo scattering elastico nella zona di risonanza come una sovrapposizione di uno "scattering potenziale" e di uno "scattering di risonanza" quasi che i due processi fossero indipendenti e non competitivi. Una formula del tipo suddetto potrebbe anche essere scritta, ma occorrerebbe in essa inserire un opportuno angolo di fase (5) al fine di evitare di violare il limite dell'unitarietà, che è quanto dire la conservazione del-

(1) Willimas, W.S.C., op. cit., p. 122

(2) Segrè, op. cit., p. 450

(3) Lamarsh, op. Cit., p. 43

(4) Hughes, Neutron Cross Sections, p. 14

(5) Willimas, W.S.C., op. cit., p. 123

l'energia e della massa.

Ricavate dunque le 2.69 - 2.71 dallo sviluppo del pa ragrafo 1, essenzialmente per mostrare che esso vale non solo nel campo delle alte energie e delle particelle elementari, ma anche alle basse energie e nella reattoristica, e accennato al lo ro corretto uso, le lasciamo perdere in quanto non ci sembra che ci siano molto utili. Infatti, dell'allargamento delle risonanze per effetto Doppler, il Lamarsh (1) tiene conto attraverso le fun zioni $\psi(\beta, x)$ e $\chi(\beta, x)$ che, in quanto tabulate (1), sarebbero utilis sime, se non presupponessero quella dipendenza dei Γ dall'energia di cui si è fatto cenno a pagina precedente e che come si è detto non è affatto verificata nella realtà.

Ci sembra invece che la strada da seguire per risol- vere il problema delle risonanze sia diversa.

Dove le risonanze sono poche e larghe, come ad es. nel sodio, ci sembra che se ne possa tenere accuratamente conto ad es. con una approssimazione polinomiale delle sezioni d'urto, e si possa anche determinare sperimentalmente il modesto varia- re della sezione d'urto per effetto Doppler.

Ma dove le risonanze sono strette, alte e dense, come nell'uranio e nel plutonio, ci sembra che a noi ciò che interessa è che dentro un dato intervallo energetico la $\bar{\sigma}(E')$ abbia un op

(1) Lamarsh, op. cit., p. 71

portano valore medio; è vero che tale valore medio dovrebbe essere pesato sul flusso, ma questo è un'altro discorso che faremo più avanti. Tale valore medio può essere determinato sperimentalmente a varie temperature, che è poi ciò che si fa in pratica per evitare di tener conto dell'effetto Doppler; con la differenza che usualmente si fanno le misure delle sezioni d'urto a temperature il più possibilmente vicine allo 0 K, con relativo costo degli esperimenti, mentre noi suggeriamo di fare le misure alle temperature ordinariamente incontrate in un reattore.

Allorchè si siano ricavate sperimentalmente le sezioni d'urto in funzione della temperatura e dell'intervallo energetico $E, \pm \Delta E$, ΔE sufficientemente stretto da dare risultati accurati e sufficientemente largo da comprendere molte risonanze, allora, con un codice fatto appositamente per mediare le sezioni d'urto, si possono convenientemente mediare, entro intervalli energetici assai più larghi, le sezioni d'urto così ottenute sul flusso, ed inserire poi tali valori medi in codici come quello che stiamo scrivendo. Ciò del resto è conforme all'uso di disporre, per un medesimo reattore, di più codici assemblati come sottoprogrammi, dei quali l'uno studi il burn-up, un altro le sezioni d'urto, un altro la distribuzione spaziale del flusso, altri l'evoluzione dinamica di start-up o di scram-down o infine di un transitorio a tempi brevi come il nostro. Quindi successivamente non ci occuperemo più del valore numerico delle $\sigma(E')$, che consideriamo dato e mediato opportunamente entro ogni gruppo energetico.

DISCRETIZZAZIONE
=====

DELL'EQUAZIONE DEL TRASPORTO
=====

3.1 INTRODUZIONE

Una soluzione analitica dell'equazione del trasporto è possibile solo in alcuni casi particolarmente semplici e praticamente privi di significato concreto, che possono essere visti sui già citati testi del Weinberg-Wigner e del Davison.

In generale, della equazione del trasporto è possibile una soluzione numerica anche se ciò comporta un notevole sforzo per il calcolatore, lunghi tempi macchina e calcolatori di non comune velocità e capacità - nonché una ottima programmazione numerica.

Il nostro lavoro è dunque dedicato a scrivere l'eq. del trasporto in una forma tale da poter essere programmata ed inserita nel calcolatore.

Iniziamo col considerare che l'incognita $\rho(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, che dobbiamo ricavare, è una funzione di sette variabili scalari.

Possiamo discretizzare su ciascuna di queste variabili, o sviluppare la dipendenza di qualcuna di queste variabili in una serie - serie che a rigore dovrebbe essere infinita, ma che per poter essere trattata da una macchina finita come un calcolatore, dovrà esser necessariamente troncata. La soluzione che otterremo sarà quindi approssimata, anche se ciò non costituisce un grave problema non solo perchè nel campo dell'ingegneria e della fisica le soluzioni alla maggior parte dei problemi sono approssimate, ma anche perchè, se disponiamo di un buon calcolatore, l'approssimazione teorica può esser dello stesso ordine dell'approssimazione dei dati sperimentali. Una precisione di calcolo maggiore sarebbe pertanto puramente illusoria.

Le attuali tecniche numeriche si orientano sulla discretizzazione su tutte e sette le variabili; noi invece seguiremo un metodo - la cosiddetta approssimazione P_L - alquanto vecchio, che però è fisicamente più significativo, strettamente connesso allo svolgimento precedente di questo lavoro - permette cioè di tener meglio conto delle correlazioni energetico-angolare $r\dot{\phi}$ - e può comunque essere confrontato, una volta esplicitato - con il metodo S_N , sotto tutti gli aspetti: facilità di programmazione, stabilità numerica, tempi macchina, flessibilità di uso.

Il primo problema che ci possiamo porre è su quale -

o quelli - variabili iniziare a discretizzare; in generale si inizia dalle variabili angolari o da quella energetica, probabilmente perchè così ci si riduce a una equazione - o un sistema di equazioni - nelle usuali variabili spazio-temporali. Resta ancora da scegliere se iniziare dalle variabili angolari o da quella energetica; noi scegliamo la prima soluzione, confermati in ciò da (1), in quanto ci sembra che in tal modo venga meglio preservata la correlazione energetico-angolare; sottolineiamo però che ci è sembrato "naturale" questo svolgimento, e non abbiamo affatto approfondito la possibilità di svolgimenti diversi che potrebbero in pratica rivelarsi più vantaggiosi. Noi diamo una soluzione, che ci sembra una buona soluzione, ma non vogliamo certo affermare che sia la migliore delle soluzioni.

Il metodo P_L è basato sullo sviluppo in armoniche sferiche; di tali funzioni, come pure dei polinomi di Legendre che ne sono, per così dire, i costituenti, ci sembra opportuno ricapitolare ora gli elementi essenziali, sia per intenderci sulle notazioni, sia per familiarizzare ad esse il lettore, tanto più che ci risulta che ~~le-studie-sistematiche-di-tali-funzioni~~ tali funzioni non abbiano ancora avuto l'onore di entrare in qualche corso del Politecnico di Torino (2).

(1) Massimo, The Physics of HTR, p. 21

(2) o almeno il loro studio sistematico

I polinomi di Legendre, $P_l(x)$, sono definiti nell'intervallo $(-1, 1)$ (quindi la variabile x in genere rappresenta un $\cos \sqrt{\quad}$) e il modo più semplice di calcolarli è dato dalla formula di ricorrenza (1) $[l \geq 0]$

$$(l+1) P_{l+1}(x) = x(2l+1) P_l(x) - l P_{l-1}(x) \quad 3.1$$

che si applica facilmente una volta noti i primi due polinomi.

Essi sono:

$$P_0(x) = 1 \quad 3.2$$

$$P_1(x) = x$$

I polinomi di Legendre godono della proprietà di ortogonalità:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_j(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,j} \quad 3.3$$

e della proprietà di completezza, onde una qualsiasi funzione $f(x)$, definita nell'intervallo suddetto, può essere sviluppata in serie di Legendre:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x) \quad 3.4$$

ove

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx \quad 3.5$$

(1) Arfken, Mathematical Methods for Physicists, p. cap. 12: a tale testo ci riferiremo, senza citarlo, anche per le prossime formule

Dai polinomi di Legendre possono essere derivati i "polinomi di Legendre associati", definiti, sempre nell'intervallo $(-1,1)$, ad es. dalla

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad 3.6$$

$$l \geq m \geq 0 \quad 3.7$$

si può rimuovere la restrizione $m \geq 0$ con la formula

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad 3.8$$

che definisce $P_l^{-m}(x)$ (con $m \geq 0$); ma che vale per $m \geq 0$.

In ogni caso

$$-l \leq m \leq l \quad l \geq 0 \quad 3.9$$

I polinomi di Legendre associati godono della proprietà di ortogonalità:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_j^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,j} \quad 3.10$$

Possiamo infine definire, entro l'intervallo

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \quad ; \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \quad 3.11$$

le armoniche sferiche:

$$Y_l^m(\vartheta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\phi} \quad 3.12$$

$$[-l \leq m \leq l ; l \geq 0]$$

che godono della proprietà di ortonormalità:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{l,m}^*(\theta, \phi) Y_{l',m'}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad 3.13$$

(l'asterisco denota il complesso coniugato), e di completezza, onde è possibile svolgere ogni funzione $f(\theta, \phi)$, dotata di sufficienti proprietà di regolarità, in serie di Laplace:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad 3.14$$

$$a_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad 3.15$$

Gli $a_{l,m}$ (come pure gli a_l della 3.5) si dicono i "momenti" dello sviluppo. ~~Biamo=quà=alcune=armoniche=sferiche~~ Ricordiamo che, in base alla suddette:

$$Y_0^0(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi} \quad 3.16$$

Notiamo che il fattore $(-1)^m$ della 3.12 ai nostri fini è pleonastico, ma lo lasciamo per uniformarci alle convenzioni dei fisici, per i quali il fattore $(-1)^m$ (Condon-Shortley phase) è essenziale per assicurare la compatibilità delle armoniche sferiche con le tabelle di composizione dei momenti angolari (Clebsch-Gordan coefficients), basate appunto su una particolare scelta di un termine di fase. (1)

Terminata questa parentesi matematica, delineiamo i tratti essenziali del metodo dello sviluppo in armoniche sferiche:

(1) Williams, W.S.C., An Introduction to Elementary Particles, p; 33

- sviluppo di $\phi(\vec{r} \in \bar{\Omega}^+)$ in serie di $Y(\theta, \phi)$ (e di $Y(\theta', \phi')$ negli integrali)
- sviluppo delle sezioni d'urto differenziali in polinomi di Legendre dell'angolo di scattering θ_{ab}
- sviluppo dei polinomi di Legendre $P_l(\cos \theta_{ab})$ in serie di $Y(\theta, \phi)$ e di $Y(\theta', \phi')$
- integrazione su $\bar{\Omega}'$: eliminazione della dipendenza da θ', ϕ'
- integrazione su $\bar{\Omega}$: eliminazione della dipendenza da θ, ϕ
- a causa dell'ortogonalità delle armoniche sferiche si disaccoppiano le equazioni, in un sistema di ∞^2 equazioni in ∞^2 incognite.

L'approssimazione P_L consiste nell'ammettere che siano identicamente nulli tutti i momenti a_{lm} , per $l > L$, dello sviluppo in serie di $\phi(\vec{r} \in \bar{\Omega}^+)$.

Ci riduciamo così ad un sistema di $(L+1)^2$ equazioni, in altrettante incognite, che hanno il vantaggio di non dipendere più dagli angoli θ, ϕ .

A questo punto sarà bene affrontare la questione della convenienza del metodo P_L o del metodo B_L . Il metodo B_L consiste nella:

- trasformazione secondo Fourier della equazione del trasporto, rispetto alle variabili spaziali
- sviluppo in armoniche sferiche come indicato ^{sopra} ~~a pag. precedente~~
- troncatura della sezione d'urto al momento L-esimo
- ulteriore calcolo dei successivi momenti del flusso.

Il vantaggio del metodo B_L consiste nel fatto che la

la troncatura della sezione d'urto al momento L-esimo (se L non è troppo basso) non costituisce affatto un'approssimazione arbitraria, ma è fisicamente giustificata dal fatto che a partire da un certo l i momenti sono trascurabilmente piccoli, indistinguibili dalle incertezze sperimentali, come si era osservato nei paragrafi 2.1 e 2.3. L'ulteriore calcolo dei successivi momenti del flusso è considerevolmente più semplice, onde possiamo calcolarci tutti i momenti del flusso fino ad un l elevato.

Lo svantaggio del metodo B_L è legato al fatto che presuppone una trasformata (spaziale) secondo Fourier. Ciò in primo luogo implica che, a conti fatti, sia necessario fare una antitrasformata, antitrasformata che non è affatto detto debba essere semplice e comoda; in secondo luogo il metodo B_L dovrebbe (usiamo il condizionale perchè non abbiamo approfondito il problema) applicarsi solo ad un mezzo infinito, o ad un mezzo finito che sia spazialmente omogeneo e in cui il flusso abbia un andamento spaziotemporale del tipo: (1)

$$\phi(\vec{r} \in \vec{\Omega} t) = e^{i(\vec{B} \cdot \vec{r} + \lambda t)} \psi(E \vec{B} \lambda) \quad 3.17$$

il che comporta un ulteriore problema agli autovalori B, λ , problema che per essere risolto può daccapo richiedere l'uso del metodo P_L .

(1) Williams, M.M.R., The Thermalization and Slowing Down of N., P. 436

Pare inoltre che (1), sempre nel caso del mezzo finito, sia necessario ammettere che il mezzo circostante al reattore abbia una sezione d'urto di puro assorbimento eguale in valore alla sezione d'urto totale del materiale costituente il reattore stesso, supposto omogeneo.

L'approssimazione B_L è quindi praticamente riservata ai codici spettrali, tipo il CGC IV e lo SLOWAN, destinati al calcolo delle medie energetiche delle sezioni d'urto.

Per poter iniziare lo sviluppo in armoniche sferiche ci manca ormai un solo elemento: la forma esplicita delle $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{in}$. Al riguardo la maggior parte degli autori pongono semplicemente:

$$\frac{\partial^2 \sigma(E')}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{in} = \sum_l a_l(E', E) P_l(\cos \theta_{in}) \quad 3.18$$

e non si preoccupano nemmeno della $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{in}$. Il problema è che, scritto

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E \partial \Omega} \Big|_{in} = \sum_j b_j(E') P_j(\cos \theta_{in}) \delta(E - E^*) \quad 3.19$$

con E^* dato dalla (2)

$$E^* = E' \frac{1}{2} \left[(1 + \alpha) + (1 - \alpha) (\omega) \nu_{in} \right] \quad 3.20$$

(1) Boffi, Fisica del Reattore Nucleare, p. 61

(2) Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, p. 168

Boffi, op. cit., parte II vol. 1°, p. 180

Williams, M.M.R., op. cit., p. 321

con E' energia iniziale (nel lab),

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 \quad 3.21$$

con A numero di massa, si potrebbe calcolare:

$$a_p(E, E) = \frac{2l+1}{2} \int \sum_j b_j(E') P_j(\cos \theta_{lab}) \delta(E-E') P_j(\cos \theta_{lab}) \sin \theta_{lab} d\theta_{lab} \quad 3.22$$

e parrebbe che

$$a_p(E', E) = b_p(E') \delta(E-E') \quad 3.23$$

Ciò, oltre ad esser probabilmente errato, ci creerebbe grossi guai, giacchè, una volta esplicitata la funzione delforme secondo la 3.20, troveremmo che la dipendenza angolare, uscita dalla porta, rientra dalla finestra.

Come fare?

E' evidente che ciò che disturba è la funzione delforme. L'unico che ha una buon idea al proposito è il Williams (1):

$$\delta(E-E') = \delta(\mu - \mu(E)) \left(+ \frac{\partial \mu(E)}{\partial E} \right) \quad 3.24$$

$$\mu = \cos \theta_{lab}$$

che risolve i nostri problemi.

Una ulteriore idea del Williams è di lavorare sulla μ variabile letargica u invece che sulla energetica E . Presa una

(1) Williams, M.M.R., op. cit., p. 322 322

energia di riferimento E_0 , ~~al-di-sopra~~ come energia di taglio al di sopra dello spettro energetico dei n nel problema in considerazione (energie tipiche di riferimento sono 10 e 17 MeV), si ha per definizione:

$$u = \lg E_0/E \quad 3.25$$

e similmente $u' = \lg E_0/E' \quad 3.26$

L'uso della variabile letargica è conveniente per due motivi:

- cresce in progressione aritmetica invece che geometrica, e quindi il suo campo di esistenza è di lacune unità, invece che di alcune decadi; ciò contribuisce ad evitare gli errori di roundoff nel calcolatore
- la forma esplicita delle $\frac{d\sigma}{dE d\Omega} |_{E, \Omega}$ ci porterà a dover integrare, nel calcolo a multigruppi energetici, o delle funzioni irrazionali dell'energia, o degli esponenziali della letargia; è ovvio che i secondi si integrano molto più facilmente dei primi.

L'uso della variabile letargica non comporta alcun problema nella scrittura della eq. del trasporto: basta sostituire

$$\phi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) \rightarrow \phi(\bar{r}, u, \bar{\Omega}, t) \quad 3.27$$

$$\sigma(E) \rightarrow \sigma(u) \quad 3.28$$

$$\frac{\partial^2 \sigma(E')}{\partial E \partial \Omega} \rightarrow \sigma(u', u, \mu) \quad (1) \quad 3.29$$

Definito $V = u - u'$ 3.30

abbiamo, per lo scattering elastico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma(E')}{\partial E \partial \Omega} &= \frac{\partial \sigma(E')}{\partial \Omega} \delta(E - E(\mu)) \\ &= \frac{\partial \sigma(E')}{\partial \Omega} \delta(\mu - \mu(E)) \left(\frac{\partial \mu}{\partial E} \right) \\ &= \sum_l a_l(E') P_l(\mu) \delta(\mu - \mu(E)) \left(\frac{\partial \mu}{\partial E} \right) \end{aligned} \quad 3.31$$

$$\begin{aligned} \sigma_d(u', u, \mu) &= \sigma_d(u', \mu) \delta(u - u(\mu)) \\ &= \sigma_d(u', \mu) \delta(\mu - \mu(u)) \left[- \frac{\partial \mu}{\partial u} \right] \\ &= \sum_l a_l(u') P_l(\mu) \delta(\mu - \mu(u)) \left[- \frac{\partial \mu}{\partial u} \right]_{e,c} \end{aligned} \quad 3.32$$

(i segni \pm nelle derivate dipendono dal fatto che a coseni decrescenti corrispondono energie finali decrescenti e letargie finali crescenti)

Fra l'altro la 3.31 non sarebbe nemmeno del tutto esatta perchè μ dipende dal rapporto E/E' e non soltanto da E . Comunque a noi ciò non interessa perchè useremo la 3.32.

Possiamo pure scrivere, analogamente alla 3.18

$$\sigma_d(u', u, \mu) = \sum_l b_l(u', u) P_l(\mu) \quad 3.33$$

(1) scrivere $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial \Omega}$ farebbe ridere

e quindi

$$b_{22}(u'V) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \sum_J a_{uJ}(u) P_J(\mu) \delta[\mu - \mu(u)] \left[-\frac{\partial \mu}{\partial u} \right] P_l(\mu)^{2l} \quad 3.34$$

$$b_{22}(u'V)_{el} = \frac{2l+1}{2} \sum_J a_{uJ}(u) P_J(\mu(u)) P_l[\mu(u)] \left[-\frac{\partial \mu}{\partial u} \right] \quad 3.35$$

ove la dipendenza di μ da V è data dalla (1):

$$\mu = \frac{1}{2} \left[(A+1)e^{-\frac{1}{2}V} - (A-1)e^{\frac{1}{2}V} \right] \quad 3.36$$

Per lo scattering inelastico nessuno ci viene in aiuto. Scriviamo comunque, in stretta analogia con le 3.32, 3.33, 3.35:

$$\sigma_{in}(u'V_p) = \sum_q \sum_J a_{uJ}(u)_{q-in} P_J(\mu) \delta[\mu - \mu(u)] \left[-\frac{\partial \mu}{\partial u} \right]_q \quad 3.37$$

$$= \sum_q \sum_J b_{22}(u'V)_{q-in} P_l(\mu) \quad 3.38$$

$$b_{22}(u'V)_{q-in} = \frac{2l+1}{2} \sum_J a_{uJ}(u)_{q-in} P_J[\mu(u)] P_l[\mu(u)] \left[-\frac{\partial \mu}{\partial u} \right]_q \quad 3.39$$

ove ovviamente la dipendenza di μ da U è diversa.

Per ricavarla abbiamo fatto lo stesso calcolo fatto dal Williams per ricavare la 3.36, e cioè abbiamo cercato di esprimere come μ_{em} come $\mu_{em}(U)$, poi attraverso la relazione $\mu = \mu(\mu_{em})$, già espressa dalla 2.38, si può infine ricavare $\mu = \mu(u)$. La qual cosa abbiamo fatto, e dopo 38 intricati passaggi ~~si~~ (che naturalmente non riportiamo) siamo infine approdati alla relazione cercata. Ne abbiamo cercato conferma attraverso un'altra strada, riottenendo la stessa formula in relativamente

(1) Williams, M.M.R., op. cit., p. 322

pochi passaggi. Li riportiamo affinché il lettore possa eventualmente controllarli. Come si noterà, abbiamo seguito la strada indicata nel par. 2.3.

m e M masse neutrone e nucleo
 v e V velocità neutrone e nucleo dopo l'urto, nel lab
 v' e V' velocità neutrone e nucleo prima dell'urto, nel lab
 E_q energia di eccitazione del livello q

$$\begin{cases} mV'_x + MV'_x = mv_x + MV_x \\ mV'_y + MV'_y = mv_y + MV_y \\ \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + E_q \end{cases} \quad 3.40$$

$$\begin{cases} mv' = mv \cos \theta + MV \cos \varphi \\ 0 = mv \sin \theta + MV \sin \varphi \\ E'_{lab} = E_{lab} + \frac{1}{2}MV^2 + E_q \end{cases} \quad 3.41$$

$$E'_{lab} = E_{lab} + E_q + \frac{1}{2} \frac{M}{m} \left[m^2 v^2 \cos^2 \theta - m^2 v'^2 + m^2 v^2 \cos^2 \theta - 2mvv' \cos \theta \right] \quad 3.42$$

$$= E_{lab} + E_q + \frac{M}{m} E_{lab} + \frac{m}{M} E'_{lab} - \frac{m^2}{M} v v' \cos \theta \quad 3.43$$

$$E'_{lab} \left[1 - \frac{m}{M} \right] - E_{lab} \left[1 + \frac{m}{M} \right] - E_q = - \frac{m}{M} \sqrt{E_{lab}} \sqrt{E'_q} \cos \theta \quad 3.44$$

$$E'_e \left[\frac{M-m}{M} \right] - E_e \left[\frac{M+m}{M} \right] - E_q = - \frac{2m}{M} \sqrt{E_e} \sqrt{E'_q} \cos \theta \quad 3.45$$

$$\cos \psi = - \frac{E'_2 \left(\frac{M-m}{M} \right) - E_2 \frac{M+u}{M} - E_q}{2 \frac{m}{M} \sqrt{E_1 E'_2}} \quad 3.46$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{M+m}{m} \sqrt{\frac{E}{E'}} - \frac{M-m}{m} \sqrt{\frac{E'}{E}} + \frac{E_q}{\sqrt{EE'}} \frac{m}{M} \right] \quad 3.47$$

$$\sqrt{\frac{E E_0}{E' E'_0}} = e^{\frac{1}{2}(v'-v)} \quad 3.48$$

$$\sqrt{\frac{E'_1}{E}} = e^{\frac{1}{2}(u-u')} \quad 3.49$$

$$\frac{E_q}{\sqrt{EE'}} = e^{\frac{1}{2}(u+u') - u_q} \quad 3.50$$

e con la solita $U = u - u'$

$$\cos \psi = \frac{1}{2} \left[\frac{M+m}{m} e^{-\frac{1}{2}U} - \frac{M-m}{m} e^{\frac{1}{2}U} + \frac{m}{M} e^{\frac{1}{2}(u+u') - u_q} \right] \quad 3.51$$

che per $E_q = 0$ si riduce alla 3.36, della quale è più generale,

e anche più esatta, perchè non approssima M/m con A .

Per quanto riguarda la $\frac{\partial \cos \psi}{\partial U}$, osserviamo che il contributo dato dall'ultimo termine della 3.51 è nullo. Ciò infatti, oltre ad essere intuitivo, può essere mostrato col seguente ragionamento.

Considerata la variabile ausiliare $V = u + u'$, si ha

$$\left. \begin{array}{l} V = u - u' \\ V = u + u' \end{array} \right\} \begin{array}{l} V + V' = 2u \\ V - V' = 2u' \end{array} \quad 3.52$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{V+V'}{2} \\ u' = \frac{V-V'}{2} \end{array} \right\} \quad 3.53$$

$$\frac{\partial}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial V} + \frac{\partial}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial V} \quad 3.54$$

dalla 54 e dalla 53 (non dalle 52!) si ha

$$\frac{\partial}{\partial V} e^{\frac{1}{2}(u+u') - u_0} = 0 \quad 3.55$$

A questo punto sarebbe ancora necessario determinare U_{\max} (corrispondente a $\mu = -1$) e U_{\min} (corrispondente a $\mu = +1$). La 3.51 è purtroppo un'equazione trascendente, la 3.47, elevata al quadrato, posto $\mu = \pm 1$, dà, dopo alcuni passaggi,

$$E_{\max/\min} = E' \frac{u^2 + M^2}{(M+u)^2} - E' \frac{u^2}{M(M+u)} \pm 2 \left(\frac{u}{M+u} \right) \sqrt{E'^2 \left(\frac{M}{u} \right)^2 - E' E' \frac{M+u}{M}} \quad 3.56$$

equazione che per $\Xi_q = 0$ si riduce alle note (1)

$$E_{\max} = E' \quad \longleftrightarrow \quad u_{\min} = u' \quad 3.57$$

$$E_{\min} = \alpha E' \quad \longleftrightarrow \quad u_{\max} = u' - \lg \alpha' \quad 3.58$$

(1) Lamarh, op. cit., p. 168

che per $E_q \neq 0$ ci dà una dipendenza poco maneggevole di E da E' e da E_q . Anche passando alla variabile letargica le cose non si semplificano affatto, anzi, dovendo nello sviluppo a multi-gruppi integrare su du' tra u_{\min} e u_{\max} , risulta la 3.56 rispetto a E' , e passati alla letargia, si ottiene che i suddetti limiti di integrazione mostrano una complicata dipendenza da u e da u_q , dipendenza che ci impedisce o almeno ci rende laboriosa la successiva integrazione su du .

Molto più semplici sono le cose per lo scattering elastico, ove, in base alle 3.57 e 3.58 si ha che U varia tra 0 e $K - \lg \alpha$ ($\lg \alpha$ è negativo).

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per poter affrontare l'approssimazione P_L .

Lavoriamo dapprima in coordinate cartesiane ortogonali, per usufruire una terna di assi fissi, indipendenti dagli angoli ϑ, ϕ , onde svolgere il termine di leakage. Avremo quindi:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \quad 3.59$$

$$\bar{\Omega} = \Omega_x \bar{i} + \Omega_y \bar{j} + \Omega_z \bar{k} \quad 3.60$$

$$= \sin \vartheta \cos \phi \bar{i} + \sin \vartheta \sin \phi \bar{j} + \cos \vartheta \bar{k} \quad 3.60$$

$$\phi(\bar{r} E \bar{\Omega} t) = \sum_p \sum_m \phi_{pm}(\bar{r} E t) Y_l^m(\vartheta, \phi) \quad 3.61$$

$$\phi_{pm}(\bar{r} E t) = \iint_{\bar{\Omega}} \phi(\bar{r} E \bar{\Omega} t) Y_l^{m*}(\vartheta, \phi) d\bar{\Omega} \quad 3.61'$$

$$P_J(\mu) = \frac{4\pi}{2J+1} \sum_{k=-J}^J Y_J^k(\vartheta, \phi) Y_J^{k*}(\vartheta, \phi) \quad (1) \quad 3.62$$

(μ è l'angolo il coseno dell'angolo fra
 Tenendo conto delle
 la direzione \hat{e}_1 e la direzione \hat{e}_2)

Tenendo conto delle suddette e di varie formule del par. 3.1 l'eq. del trasporto diviene:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \sum_p \sum_m \phi_{pm}(\bar{r} u t) Y_l^m(\vartheta, \phi) +$$

$$+ \sum_i \sum_p \sum_m \phi_{pm}(\bar{r} u t) N_i(\bar{r}, t) \sigma_i(u) Y_{lm}(\vartheta, \phi) +$$

(1) Arfken, Mathematical Methods for Physicists, p. 581

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_l \sum_m \sin \nu \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2} \phi_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_l \sum_m i \cos \nu \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \phi_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_l \sum_m \cos \nu \phi_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi) \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \int_{u'} \int_{\bar{\Omega}'} \sum_l \sum_l \sum_m \sum_j \phi_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi) N_l(\bar{r}, t) b_j(u', \nu) P_j(\nu) du' d\bar{\Omega}'$$

$$= \int_{u'} \int_{\bar{\Omega}'} \sum_l \sum_l \sum_m \sum_j \sum_k \phi_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi) N_l(\bar{r}, t) b_j(u', \nu) \frac{4\pi}{2j+1} Y_j^k(\nu^k \phi) Y_j^{k*}(\nu^k \phi) du' d\bar{\Omega}'$$

$$+ \int_{u'} \int_{\bar{\Omega}'} \sum_l \sum_l \sum_m \sum_j \sum_k \sum_q \phi_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi) N_l(\bar{r}, t) b_j(u', \nu) \frac{4\pi}{2j+1} Y_j^k(\nu^k \phi) Y_j^{k*}(\nu^k \phi) du' d\bar{\Omega}'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} (1-\beta) \int_{u'} \sum_l \chi_l(u) \nu_l(u) \sigma_{p_l}(u) N_l(\bar{r}, t) \int_{\bar{\Omega}'} \sum_l \sum_m \phi_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi) du' d\bar{\Omega}' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_r \sum_l \sum_l \sum_m \lambda_r e^{-\lambda_r t} \left[C_r(\bar{r}, 0) + \int_0^t e^{\lambda_r t'} \beta_r \right]$$

$$\int_{u'} \int_{\bar{\Omega}'} \nu_l(u) N_l(\bar{r}, t) \sigma_{p_l}(u) \phi_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi) du' d\bar{\Omega}' dt' \chi_r(u)$$

$$+ \sum_p \sum_m S_{pm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\nu^l \phi)$$

ora, in base ad alcune formule del paragrafo precedente e in base alle (1):

$$\cos \vartheta \left| Y_e^m(\vartheta, \phi) \right. = + \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^m(\vartheta, \phi) + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^m(\vartheta, \phi) \quad 3.64$$

$$e^{i\phi} \sin \vartheta \left| Y_e^m(\vartheta, \phi) \right. = - \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m+1}(\vartheta, \phi) + \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m+1}(\vartheta, \phi) \quad 3.65$$

$$e^{-i\phi} \sin \vartheta \left| Y_e^m(\vartheta, \phi) \right. = + \left[\frac{(l-m-1)(l-m-2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m-1}(\vartheta, \phi) - \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m-1}(\vartheta, \phi) \quad 3.66$$

e-quindi: si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \sum_l \sum_m \phi_{lm}(\vec{r}, t) Y_{lm}(\vartheta, \phi) + \sum_l \sum_m \sum_n \phi_{ln}(\vec{r}, t) N_l(\vec{r}, t) \sigma_l(u) Y_{lm}(\vartheta, \phi) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \sum_l \sum_m \phi_{lm}(\vec{r}, t) \left\{ - \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m+1}(\vartheta, \phi) + \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m+1}(\vartheta, \phi) \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m-1}(\vartheta, \phi) - \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m-1}(\vartheta, \phi) \right\} \\ & + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial y} \sum_l \sum_m \phi_{lm}(\vec{r}, t) \left\{ - \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^m(\vartheta, \phi) + \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^m(\vartheta, \phi) \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m-1}(\vartheta, \phi) + \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m-1}(\vartheta, \phi) \right\} \\ & + \frac{i}{2\epsilon} \sum_l \sum_m \phi_{lm}(\vec{r}, t) \left\{ + \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^m(\vartheta, \phi) + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^m(\vartheta, \phi) \right\} = \end{aligned}$$

(1) Arfkem, op. cit., p. 587

$$\begin{aligned}
&= \int_{u'} \sum_i \sum_l \sum_m \phi_{lm}(\bar{r}, t) N_i(\bar{r}, t) b_l(u') \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\hat{r}) du' \\
&+ \int_{u'} \sum_i \sum_l \sum_m \sum_q \phi_{lm}(\bar{r}, t) N_i(\bar{r}, t) b_l(u') i^{l-q} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\hat{r}) du' \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{u'} (1-\beta) \sum_i \chi(u) v_i(u) \bar{y}_i(u) N_i(\bar{r}, t) \sqrt{2l+1} \phi_{00}(\bar{r}, t) du' \\
&+ \frac{1}{4\pi} \sum_i \sum_l \lambda_l e^{-\lambda_l t} \chi(u) \left[C_l(\bar{r}, 0) + \int_0^t e^{-\lambda_l t'} \beta_l \int_{u'} v_i(u') N_i(\bar{r}, t') \right. \\
&\quad \left. \cdot \sigma_f(u') \phi_{00}(\bar{r}, u', t') du' dt' \right] + \sum_l \sum_m S_{lm}(\bar{r}, t) Y_l^m(\hat{r}) \quad \boxed{3.67}
\end{aligned}$$

Moltiplicando ora l'eq. 3.67 ~~per~~ ~~integrando su~~ per $Y_l^m(\hat{r})$, integrando su $d\bar{\Omega}$, cambiando, a conti fatti, L con l , si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{lm}(\bar{r}, t) + \sum_i \phi_{lm}(\bar{r}, t) N_i(\bar{r}, t) \bar{v}_i(u) + \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ -\phi_{l-1, m-1}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l+m-1)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} \right\} + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \phi_{l+1, m-1}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l-m+2)(l-m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \phi_{l-1, m+1}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l-m-1)(l-m)}{2l-1} \right]^{1/2} \right\} + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ -\phi_{l+1, m+1}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l+m+2)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_{l-1, m}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l-m)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} + \phi_{l+1, m}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \frac{1}{(2l+1)^{1/2}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{u'} \sum_i \phi_{im}(\bar{r}, u', t) N_i(\bar{r}, t) b_{ei}(u' V_{ei}) d \frac{4\pi}{2\beta+1} du' \\
&+ \int_{u'} \sum_i \sum_j \phi_{im}(\bar{r}, u', t) N_i(\bar{r}, t) b_{ej}(u' V_{ej}) d \frac{4\pi}{2\beta+1} du' \\
&+ (1-\beta) \int_{u'} \sum_i \chi_i(u) \psi_i(u') \sigma_{pi}(u') N_i(\bar{r}, t) \phi_{00}(\bar{r}, u', t) du' \quad \delta_{i,0} \\
&+ \int_{p,0} \sum_i \sum_r \chi_r e^{-\lambda_r t} \chi_r(u) \left[C_r(\bar{r}, 0) + \int_0^t e^{-\lambda_r t'} \beta_r \chi_r(u') \sigma_{pi}(u') \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot N_i(\bar{r}, t') \phi_{00}(\bar{r}, u', t') du' dt' \right] + \int_{p,u}(\bar{r}, u, t)
\end{aligned}$$

3.68

Poichè in generale i reattori hanno geometria cilindrica, e a geometria cilindrica è il reattore da noi preso in considerazione (cfr. Prefazione), ci conviene passare a coordinate cilindriche, ρ, ψ, z , ove:

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad 3.69$$

$$\psi = \tan^{-1} y/x \quad 3.70$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \pm i \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \pm i \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \quad 3.71$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2+y^2)^{1/2}} \right] + \frac{-y/x^2}{1-(y/x)^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \pm i \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \pm i \frac{1/x}{1-(y/x)^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad 3.72$$

$$= \frac{x \pm iy}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left[\frac{-y/x \pm i x/x^2}{\frac{x^2+y^2}{\rho^2}} \right] \frac{\partial}{\partial \psi} \quad 3.73$$

$$= (\cos \psi \pm i \sin \psi) \frac{\partial}{\partial \rho} + \left[\frac{-\rho \sin \psi \pm i \rho \cos \psi}{\rho^2} \right] \frac{\partial}{\partial \psi} \quad 3.74$$

$$= e^{\pm iy} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{j} [i \sin y \pm \cos y] \frac{\partial}{\partial y} \quad 3.75$$

$$= e^{\pm iy} \frac{\partial}{\partial \rho} \pm \frac{i e^{\pm iy}}{j} \frac{\partial}{\partial y} \quad 3.76$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} = e^{\pm iy} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \pm \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad 3.77$$

Inserendo la 3.77 nella 3.68

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{lm}(\bar{r}, t) + \sum_i \phi_{lm}(\bar{r}, t) N_i(\bar{r}, t) \sigma_i(u) \\ & + \left\{ -\frac{1}{2} e^{-iy} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \phi_{l-1, m}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l+m-1)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} e^{-iy} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \phi_{l+1, m-1}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l-m+2)(l-m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} e^{iy} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \phi_{l-1, m+1}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l-m-1)(l-m)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} e^{iy} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \phi_{l+1, m+1}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l+m+2)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_{l-1, m}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l-m)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} + \phi_{l+1, m}(\bar{r}, t) \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \cdot (2l+1)^{-1/2} \right. \right. \\ & = \int_{u'} \sum_i \phi_{lm}(\bar{r}, u') N_i(\bar{r}, t) b_i(u', t) e^{\frac{4\pi}{2l+1}} du' \\ & + \int_{u'} \sum_i \sum_q \phi_{lm}(\bar{r}, u') N_i(\bar{r}, t) b_i(u', t) e^{i h \cdot q} e^{\frac{4\pi}{2l+1}} du' \\ & + \int_{u'} (1-\beta) \sum_i \chi_i(u) v_i(u') \sigma_{p_i}(u') \phi_{00}(\bar{r}, u') N_i(\bar{r}, t) du' \delta_{p,0} \\ & + \delta_{p,0} \sum_i \sum_n \lambda_i e^{-\lambda_i t} \chi_n(u) \left[C_n(\bar{r}, u) + \int_0^t e^{-\lambda_i t'} \beta_{r_n} \right] v_i(u') \sigma_{p_i}(u') \\ & \quad \cdot N_i(\bar{r}, t) \phi_{00}(\bar{r}, u', t') du' dt' + S_{p,m}(\bar{r}, u', t) \end{aligned} \quad 3.78$$

Per poter effettuare il calcolo numerico è necessario evidenziare la parte reale e la parte immaginaria di tutte le quantità complesse che compaiono nelle equazioni. Poichè non ci sembra che l'integrazione sulla variabile letargica, che effettueremo nel paragrafo 3.4, darà luogo a quantità complesse, ci sembra opportuno trattare ora il problema suddetto.

Dalle definizioni 3.12 si ha che (1):

$$Y_c^{-m} = (-1)^m Y_c^{m*} \quad 3.79$$

e quindi, omettendo per brevità le dipendenze funzionali:

$$\phi_{em} \pm \phi_{e,-m} = \iint \phi [Y_c^{m*} \pm Y_c^{-m*}] d\bar{\Omega} \quad 3.80$$

$$= \iint \phi [Y_c^{m*} \pm (-1)^m Y_c^m] d\bar{\Omega} \quad 3.81$$

$$[a, b \text{ reali}] \quad = \iint \phi [a - ib \pm (-1)^m [a + ib]] d\bar{\Omega} \quad 3.82$$

$$= \iint \phi \{ a [1 \pm (-1)^m] + ib [-1 \pm (-1)^m] \} d\bar{\Omega} \quad 3.83$$

da cui si vede che, essendo il flusso reale,

$$\phi_{em} + \phi_{e,-m} \quad \text{è reale} \quad \text{se } M \text{ è pari} \quad 3.84$$

$$\phi_{im} + \phi_{i,-m} \quad \text{è immaginario puro se } M \text{ è dispari} \quad 3.85$$

$$\phi_{em} - \phi_{e,-m} \quad \text{è immaginario puro se } M \text{ è pari} \quad 3.86$$

$$\phi_{im} - \phi_{i,-m} \quad \text{è reale} \quad \text{se } M \text{ è dispari} \quad 3.87$$

(1) Arfkem, op. cit., p. 580

Sommiamo ora e rispettivamente sottraiamo alla 3.78 l'equazione che da essa si ottiene cambiando M in $-M$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_{e,m} \pm \phi_{e,-m}) + \sum_i (\phi_{e,m} \pm \phi_{e,-m}) N_i \bar{\sigma} - (S_{e,m} \pm S_{e,-m}) \\
 & - \int_{u'} \sum_i (\phi_{e,m} \pm \phi_{e,-m}) N_i \frac{4\pi}{2l+1} \left(b_e + \sum_q b_{e,q} \right) du' \mp (F \pm F) \delta_{e,0} + \\
 & + \left\{ -\frac{1}{2} e^{-iy} \left[\frac{\partial}{\partial y} - \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \phi_{l-1}^{n-1} \left[\frac{(l+m+1)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} \pm \phi_{l-1}^{-(n-1)} \left[\frac{(l-m)(l-m+1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} e^{-iy} \left[\frac{\partial}{\partial y} - \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \phi_{l+1}^{n-1} \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \pm \phi_{l+1}^{-(n-1)} \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right. \\
 & + \frac{1}{2} e^{iy} \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \phi_{l-1}^{n+1} \left[\frac{(l-m)(l-m+1)}{2l-1} \right]^{1/2} \pm \phi_{l-1}^{-(n+1)} \left[\frac{(l+m)(l+m+1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} e^{iy} \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{i}{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left\{ \phi_{l+1}^{n+1} \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \pm \phi_{l+1}^{-(n+1)} \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_{l-1}^m \left[\frac{(l-m)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} + \phi_{l+1}^m \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right. \right. \\
 & \left. \left. \pm \phi_{l-1}^{-m} \left[\frac{(l-m)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} \pm \phi_{l+1}^{-m} \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \right\} (2l+1)^{-1/2} = 0
 \end{aligned}$$

3.88

(F rappresenta i termini di fissione)

da cui, soffermandoci sul termine di leakage:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-e^{-i\varphi} \phi_{\ell-1}^{m-1} \pm e^{i\varphi} \phi_{\ell-1}^{-(m-1)} \right] \left[\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \right. \\
& + \frac{i}{2\rho} \left[e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{\ell-1}^{m-1} \pm e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{\ell-1}^{-(m-1)} \right] \left[\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[e^{-i\varphi} \phi_{\ell+1}^{m+1} \mp e^{i\varphi} \phi_{\ell+1}^{-(m+1)} \right] \left[\frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\
& + \frac{i}{2\rho} \left[-e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{\ell+1}^{m+1} \mp e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{\ell+1}^{-(m+1)} \right] \left[\frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[e^{i\varphi} \phi_{\ell-1}^{m+1} \mp e^{-i\varphi} \phi_{\ell-1}^{-(m+1)} \right] \left[\frac{(\ell-m)(\ell-m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\
& + \frac{i}{2\rho} \left[e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{\ell-1}^{m+1} \pm e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{\ell-1}^{-(m+1)} \right] \left[\frac{(\ell-m)(\ell-m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-e^{i\varphi} \phi_{\ell+1}^{m+1} \pm e^{-i\varphi} \phi_{\ell+1}^{-(m+1)} \right] \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell+m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\
& + \frac{i}{2\rho} \left[-e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{\ell+1}^{m+1} \mp e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{\ell+1}^{-(m+1)} \right] \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell+m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\phi_{\ell-1}^m \pm \phi_{\ell-1}^{-m} \right) \left[\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{2\ell-1} \right]^{1/2} + \left(\phi_{\ell+1}^m \pm \phi_{\ell+1}^{-m} \right) \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \right] \right\} \cdot (2\ell+1)^{-1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \cos \gamma \left[-\phi_{l-1}^{m-1} \pm \phi_{l-1}^{-(m-1)} \right] + i \sin \gamma \left[+\phi_{l-1}^{m-1} \pm \phi_{l-1}^{-(m-1)} \right] \right\} \left[\frac{(\rho+m-1)(\rho+m)}{2\rho-1} \right]^{1/2} \right. \\
& + \frac{1}{2\rho} \left\{ \cos \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[+\phi_{l-1}^{m-1} \pm \phi_{l-1}^{-(m-1)} \right] + i \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[-\phi_{l-1}^{m-1} \pm \phi_{l-1}^{-(m-1)} \right] \right\} \left[\frac{(\rho+m-1)(\rho+m)}{2\rho-1} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \cos \gamma \left[+\phi_{l-1}^{m-1} \mp \phi_{l-1}^{-(m-1)} \right] + i \sin \gamma \left[-\phi_{l-1}^{m-1} \mp \phi_{l-1}^{-(m-1)} \right] \right\} \left[\frac{(\rho+m-1)(\rho+m-2)}{2\rho+3} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2\rho} \left\{ \cos \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[-\phi_{l-1}^{m-1} \mp \phi_{l-1}^{-(m-1)} \right] + i \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[+\phi_{l-1}^{m-1} \mp \phi_{l-1}^{-(m-1)} \right] \right\} \left[\frac{(\rho+m-1)(\rho+m-2)}{2\rho+3} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \cos \gamma \left[+\phi_{l-1}^{m+1} \mp \phi_{l-1}^{-(m+1)} \right] + i \sin \gamma \left[+\phi_{l-1}^{m+1} \pm \phi_{l-1}^{-(m+1)} \right] \right\} \left[\frac{(\rho-m-1)(\rho-m)}{2\rho-1} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2\rho} \left\{ \cos \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[+\phi_{l-1}^{m+1} \pm \phi_{l-1}^{-(m+1)} \right] + i \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[+\phi_{l-1}^{m+1} \mp \phi_{l-1}^{-(m+1)} \right] \right\} \left[\frac{(\rho-m-1)(\rho-m)}{2\rho-1} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \cos \gamma \left[-\phi_{l-1}^{m+1} \pm \phi_{l-1}^{-(m+1)} \right] + i \sin \gamma \left[-\phi_{l-1}^{m+1} \mp \phi_{l-1}^{-(m+1)} \right] \right\} \left[\frac{(\rho+m+1)(\rho+m-2)}{2\rho+3} \right]^{1/2} \\
& + \frac{1}{2\rho} \left\{ \cos \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[-\phi_{l-1}^{m+1} \mp \phi_{l-1}^{-(m+1)} \right] + i \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[-\phi_{l-1}^{m+1} \pm \phi_{l-1}^{-(m+1)} \right] \right\} \left[\frac{(\rho+m+1)(\rho+m-2)}{2\rho+3} \right]^{1/2} \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left(\phi_{l-1}^m \pm \phi_{l-1}^{-m} \right) \left[\frac{(\rho+m)(\rho-m)}{2\rho-1} \right]^{1/2} + \right. \\
& \left. + \left(\phi_{l+1}^m \pm \phi_{l+1}^{-m} \right) \left[\frac{(\rho+m-1)(\rho-m+1)}{2\rho+3} \right]^{1/2} \right\} (2\rho+1)^{-1/2}
\end{aligned}$$

La 3.90 è confortante. Infatti, anche se in essa com-
paiono dei fattori immaginari (immaginari puri), tutti i suoi ad-
dendi sono reali (o eventualmente tutti immaginari puri).

Per fissare le idee, si consideri il caso che nella
eq. 3.88 M sia pari (il caso $M=0$ è banale e di scarso interesse),
e valga il segno superiore. Allora, per la 3.84, i primi sei ter-
mini della 88 (cioè tutti i termini meno quello di leakage) sa-
ranno reali. Allora anche nella 90 varrà il segno superiore, ma,
essendo $M-1$ dispari, il suo primo termine, che è una differenza,
sarà reale per la 3.87, il secondo, che è una somma, sarà immagi-
nario per la 3.86, ma, essendo moltiplicato dal fattore i , sarà
daccapo globalmente reale, e così pure il terzo, etc., giacchè
si osserva che nelle prime otto righe della 3.90 compaiono tutti
termini in $M+1$, che, essendosi supposto M pari, è dispari. Si ϕ
osserva che ove tra parentesi quadre il segno superiore indica u-
na differenza, la parentesi quadra è preceduta da un coefficiente
reale, e dove indica una somma, da un coefficiente immagina-
rio puro.

E' comunque opportuno che nella equazione compaiano
tutte quantità manifestamente reali: ciò può essere fatto con la
posizione:

$$\phi_{l,m}(\bar{r}, ut) + \phi_{l,-m}(\bar{r}, ut) = \phi_{l,m+}(\bar{r}, ut) i^{|m|} \quad 3.91$$

$$\phi_{l,m}(\bar{r}, ut) - \phi_{l,-m}(\bar{r}, ut) = \phi_{l,m-}(\bar{r}, ut) i^{|m+1|} \quad 3.92$$

Con semplici calcoli, che possono essere resi più veloci con l'uso di un'opportuna tabella, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial r} \phi_{\pm l m}(\bar{r}, ut) + \sum_i \phi_{\pm l m}(\bar{r}, ut) N_i(\bar{r}, t) \bar{v}_i(u) + \\
 & + \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left({}^{(0)}\varphi \right) \right]_{\mp} \phi_{\mp l-1 m-1}(\bar{r}, ut) \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad \pm \phi_{\mp l-1 m-1}(\bar{r}, ut) \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 & \quad \mp \phi_{\mp l-1 m+1}(\bar{r}, ut) \left[\frac{(l-m-1)(l-m)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 & \quad \pm \phi_{\mp l+1 m+1}(\bar{r}, ut) \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 & \quad \left. + \sin \varphi \right\} + \phi_{\pm l-1 m-1}(\bar{r}, ut) \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 & \quad - \phi_{\pm l+1 m-1}(\bar{r}, ut) \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 & \quad - \phi_{\pm l-1 m+1}(\bar{r}, ut) \left[\frac{(l-m-1)(l-m)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 & \quad \left. + \phi_{\pm l+1 m+1}(\bar{r}, ut) \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ + \phi_{\pm \ell-1, m-1} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \right. \\
& \quad - \phi_{\pm \ell-1, m} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\
& \quad - \phi_{\pm \ell-1, m+1} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell-m)(\ell-m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\
& \quad + \phi_{\pm \ell-1, m+2} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell+m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\
& + \frac{j \sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \pm \phi_{\mp \ell-1, m-1} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \right. \\
& \quad \mp \phi_{\mp \ell-1, m} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\
& \quad \pm \phi_{\mp \ell-1, m+1} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell-m)(\ell-m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\
& \quad \mp \phi_{\mp \ell-1, m+2} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell+m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \phi_{\pm \ell-1, m} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell-m)(\ell-m)}{2\ell-1} \right]^{1/2} + \phi_{\pm \ell+1, m} (\bar{r}, ut) \left[\frac{(\ell-m+1)(\ell-m+1)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \right\} (2\ell+1)^{-1/2} =$$

$$= \int_{u'} \sum_{\pm} \phi_{\pm \ell, m} (\bar{r}, ut) N_{\ell}(\bar{r}, r) h_{\ell}(u', v) d \frac{4\pi}{2\ell+1} du'$$

$$+ \int_{u'} \sum_{\pm} \sum_{\ell} \phi_{\pm \ell, m} (\bar{r}, ut) N_{\ell}(\bar{r}, r) h_{\ell}(u', v)_{\ell-1} d \frac{4\pi}{2\ell-1} du'$$

$$+ 2\delta_{\ell,0} (1-\beta) \int_{u'} \sum_{\ell} \chi_{\ell}(u) \nu_{\ell}(u) \sigma_{\ell}(u) N_{\ell}(\bar{r}, r) \phi_{\ell,0}(\bar{r}, ut') du'$$

$$+ 2\delta_{\ell,0} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \lambda_{\ell} e^{-\lambda_{\ell} r} \chi_{\ell}(u) \left[C_{\ell}(\bar{r}, 0) + \int_0^r e^{-\lambda_{\ell} r'} \beta_{\ell} \right.$$

$$\left. \int_{u'} \nu_{\ell}(u) \sigma_{\ell}(u) N_{\ell}(\bar{r}, r) \phi_{\ell,0}(\bar{r}, ut') du' dt' \right] + S_{\ell, m \pm}(\bar{r}, ut)$$

Il suddetto costituisce come ovvio un sistema di $(L+1)^2$ equazioni nelle altrettante incognite definite dalle 3.91-92. La 3.78 è un sistema di $2l+1$ equazioni per ogni l ; quindi anche la 3.93 deve essere un sistema di $2l+1$ equazioni per ogni l . Ciò si verifica facilmente: infatti, per $m=0$, esiste una sola equazione per ogni l , quella presa con il segno superiore (quella presa con il segno inferiore porta ovviamente all'identità $0 = 0$). Per $m \neq 0$, si deve scegliere se prendere $m > 0$ o $m < 0$. In ogni caso, esistono $2l$ equazioni per ogni $l \neq 0$. Naturalmente, le equazioni in cui m è diverso da zero sono identiche che a quelle in cui si scambiano m in $-m$, e quindi non ne sono linearmente indipendenti. Anche però fissando di scegliere m maggiore o minore di zero, allorché $m=0$, compare nel termine di leakage un m di segno opposto rispetto a quello prescelto. Ciò tuttavia non costituisce una difficoltà, giacché è ovviamente facile, attraverso le 3.91 e 92, correlare $\phi_{\pm, l \pm 1, 1}$ con $\phi_{\pm, l \pm 1, -1}$.

La nostra trattazione sarebbe troppo incompleta se non ritornassimo sul problema delle condizioni all'interfaccia e al contorno. Come già visto, esse sono di natura non usuale, e risultano complicate dal fatto che abbiamo troncato lo sviluppo ad un certo L .

A questo punto ci conviene premettere che L (cioè

l_{\max} , di troncatura) deve essere dispari: infatti, come è possibile intuire dal fatto che la parità delle Y_1^m è $(-1)^l$, (1), come è possibile dimostrare, almeno per qualche caso particolare, per via teorica (2), e come è stato mostrato dai calcoli eseguiti con metodi P_L , l'approssimazione P_{2L+1} dà risultati migliori della successiva P_{2L+2} , benchè quest'ultima comporti un numero di incognite e di equazioni decisamente superiore.

Ci sembra (3) che la condizione 1.38 possa essere messa nella forma, più usuale e significativa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che}$$

$$\left| \phi(\bar{r} + (s+\delta)\bar{r}, E, \bar{n}, t + \frac{s+\delta}{v}) - \phi(\bar{r} - s\bar{r}, E, \bar{n}, t + \frac{s}{v}) \right| < \varepsilon \quad 3.94$$

ove $\bar{r} + s\bar{n}$ è all'interfaccia

Iniziamo col notare che nella 3.94 non è lecito porre $s=0$ e $r=R_s$

(1) Arfken, op. cit., p. 572

(2) Davison, op. cit., p. 127

(3) ci scusiamo con il lettore per questo "ci sembra" che non è molto elegante, e che sarà seguito da altre espressioni dubitative per il resto di questo paragrafo, ma il fatto è che dei molti testi di Fisica del Reattore citati in questo nostro lavoro, e di molti altri nemmeno presi in considerazione perchè a livello %

con r_s appartenente all'interfaccia, giacchè con la presenza di s si vuole sottolineare (anche se ciò non è sottolineato dai testi citati a p. 23) che può esistere una discontinuità parallelamente all'interfaccia: cioè per \bar{r} vicinissimo all'interfaccia e $\bar{\Omega}$ parallelo all'interfaccia è possibile che il flusso presenti una discontinuità ai due lati dell'interfaccia, giacchè i n di direzione $\bar{\Omega}$ parallela all'interfaccia non hanno alcuna possibilità di varcare l'interfaccia stesso (a meno naturalmente di mutare direzione in conseguenza di una collisione).

Le differenze della 1.38 (o della a nostro parere equivalente 3.94) rispetto alle usuali condizioni all'interfaccia sono, a nostro giudizio, essenzialmente tre:

- la presenza del vettore $\bar{\Omega}$

% segue da pag. precedente: assai più elementare, solo il Boffi e il Davison si occupano di condizioni al contorno. Sfortunatamente, il Boffi si limita a citarle, alle p. 24 e 25, e non dà suggerimenti sul come usarle; il Davison, oltre a citarle alle p. 21 e 22, si occupa diffusamente di tali condizioni nel caso di geometria unidimensionale, indipendente dal tempo e dall'energia, calcolato col metodo dei polinomi di Legendre; meno diffusamente nel caso di geometria tridimensionale, e sempre nelle ipotesi suddette; mentre liquida in poche righe il problema delle condizioni al contorno nel caso dipendente dall'energia e infine non si occupa affatto, come del resto in tutto il suo libro, di problemi dipendenti dal tempo. Non neghiamo che i problemi sud

- il legame tra \bar{D} e \bar{P} , esplicitato quantitativamente dalla s
- il legame che la s comporta tra t ed E

Il primo punto riguarda ovviamente anche la 1.39 (e la 1.40), e ce ne occuperemo per il resto del paragrafo; del secondo punto abbiamo già parlato alla pagina precedente; del terzo punto ci sembra di poter dire soltanto che esso non provoca guai se non ci si va a cacciare in quelle situazioni stravaganti, ~~quanto~~ prive di significato fisico concreto, quali ad es. sorgenti delti forme localizzate all'interfaccia e magari nel contorno esterno del mezzo.

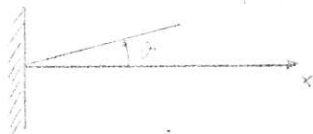
Iniziamo col considerare il caso della geometria unidimensionale, non solo perchè è il più semplice, ma anche perchè in una geometria cilindrica due delle facce saranno certamente piane. Ammettiamo che il mezzo sia costituito dal semipiano $x \geq 0$, e che l'interfaccia sia localizzato ad es. al punto x_1 . Prescindendo dalla dipendenza energetico-temporale, e chiamato *potenziale*

segue da pag. precedente: detti siano stati diffusamente trattati; non ci sembra però necessario sfogliare innumerevoli riviste per trattare un problema che nell'ambito di questo lavoro ci sembra alquanto specialistico e a cui comunque ci sembra di aver dato una sistemazione soddisfacente.

1a1.38 significa semplicemente che (1):

$\phi(x, \mu)$ sia funzione continua di x (nell'intorno di x_1) per ogni μ eccetto eventualmente $\mu = 0$. 3.95

Si è posto:



Se sviluppiamo il flusso in una serie infinita di polinomi di Legendre, ciò significa semplicemente che

$\phi(x)$ sia funzione continua di x (nell'intorno di x_1) per ogni μ eccetto eventualmente $\mu = 0$ 3.96

ove

$$\phi(x) = \frac{2L+1}{2} \int_{-1}^1 \phi(x, \mu) P_L(\mu) d\mu \quad 3.97$$

Se noi tronchiamo lo sviluppo di ϕ al termine L -esimo, potremo al massimo porre $L+1$ condizioni di continuità:

$\phi_e(x)$ sia funzione continua di x (nell'intorno di x_1) per ogni μ eccetto eventualmente $\mu = 0$

Per quanto riguarda invece la condizione 1.39, iniziamo col notare che è intuitivo che non potremo soddisfare $L+1$ condizioni, ma solo $(L+1)/2$ condizioni, proprio perchè le direzioni entranti nel mezzo sono esattamente la metà delle direzioni totali che i neutroni possono avere ad un'interfaccia: in altre parole μ varia tra 0 e 1, e non tra -1 e 1.

(1) Davison, Neutron Transport Theory, p. 126

Si vede subito che se L fosse pari, capirebbe qual
che guaio ulteriore oltre a quelli elencati a p. 89; comunque, e
ammesso che L sia dispari, la condizione 1.39, che nella fattispe
cie diventa:

$$\phi(x=0, \mu) = 0 \quad \text{per } \mu \geq 0 \quad 3.99$$

e, nel caso di sviluppo in serie infinita di Legendre:

$$\phi_r(0) = 0 \quad \text{per } \mu \geq 0 \quad \text{e } \forall l \quad 3.100$$

può essere trattata in tre modi diversi:

- 1) imponendo che il flusso si annulli in $(L+1)/2$ direzioni di-
verse opportunamente scelte:

$$\phi(x=0, \mu_j) = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, \frac{L+1}{2} \quad 3.101$$

e $\mu_j > 0$

- 2) imponendo che si annulli l'integrale di $\phi(0, \mu)$ tra 0 e 1,
pesato con $(L+1)/2$ opportune funzioni $\chi_j(\mu)$ definite nel sud-
detto intervallo:

$$\int_0^1 \phi(x=0, \mu) \chi_j(\mu) d\mu = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, \frac{L+1}{2} \quad 3.102$$

- 3) ammettendo che il semispazio $x \geq 0$ sia occupato, invece che
dallo spazio vuoto, da un "corpo" nero" cioè da un assorbitore
perfetto.

3.103

E' evidente, che, se non capitano situazioni del tipo
di quelle illustrate dalla ~~4+39~~ 1.40, la condizione 3.103 è quel

la fisicamente più sensata.

Mark è stato abile a dimostrare che le condizioni 3.103 e 3.101 si equivalgono se:

$$\mu_J \text{ è dato dalle } (L+1)/2 \text{ radici positive di } P_{L+1}(\mu) = 0 \quad 3.104$$

Il suddetto è chiamato "lemma di Mark" e le condizioni che esso prescrive son dette "condizioni di Mark".

Un modo acconcio di scegliere le funzioni χ prescritte dalla 3.102 è quello di scegliere i primi $(L+1)/2$ membri di una serie di funzioni complete e ortogonali nell'intervallo 0,1. Ora, nel suddetto intervallo godono della suddette proprietà sia la serie dispari che la serie pari dei polinomi di Legendre. Abbiamo quindi l'alternativa:

$$\chi_J(\mu) = P_{2J}(\mu) \quad 3.105$$

$$\chi_J(\mu) = P_{2J+1}(\mu) \quad 3.106$$

con l intero positivo. Poichè però

$$P_1(\mu) = \mu \quad 3.107$$

scegliendo l'alternativa 3.106, la 3.102 ci assicura, attraverso la 3.107, l'annullarsi della corrente neutronica ~~entrante~~ ~~superficie~~ nella superficie esterna. A causa di questa condizione, si ha che:

4° l'alternativa 3.106 è senz'altro da preferirsi alla 3.105

2° per L piccolo (cioè minore di 5 o 7) condizioni del tipo 3.102 danno risultati migliori di quelle di Mark. L'inverso accade per L maggiori, anche se evidentemente ci sono casi particolari in cui le une o le altre condizioni sono nettamente preferibili.

Abbiamo quindi che

$$\int_0^1 \phi(x=0, \mu) P_{2j-1}(\mu) d\mu = 0 \quad \text{per } j=1, \dots, \frac{L+1}{2} \quad 3.108$$

o alternativamente

$$\int_0^1 \phi(x=0, \mu) \mu^{2j-1} d\mu = 0 \quad \text{per } j=1, \dots, \frac{L+1}{2} \quad 3.109$$

Le 108 e 109 sono dette "condizioni al contorno di Marshak".

Nel caso di sorgenti esterne, (cioè nel caso contemplato dalla 1.40) è evidente che le condizioni di Mark sono del tutto inadatte, e la 1.40 si trasforma nella:

$$\int_0^1 \phi(x=0, \mu) \mu^{2j-1} d\mu = \int_0^1 f_{\text{ext}}(x=0, \mu) \mu^{2j-1} d\mu \quad \text{con } j=1, \dots, \frac{L+1}{2} \quad 3.110$$

Nel caso di geometria tridimensionale, interviene l'ulteriore complicazione che non tutti i $(L+1)^2$ momenti in cui è stato sviluppato il flusso angolare, sono necessariamente indipendenti linearmente; si può tuttavia dimostrare che almeno L^2 di essi sono linearmente indipendenti (cioè geometricamente compatibili con la geometria del sistema) e quindi le 3.106 e 3.108 si trasformano rispettivamente nelle:

$\phi_{l,m}(\bar{r})$ è funzione continua di \bar{r} (con \bar{r} prossimo all'interfaccia)
 per ogni $l \leq L-1$
 e per ogni m relativo: $0 \leq l \leq L-1$
 e per tutti gli m possibili relativi ad $l=L$, a cominciare
 dagli $|m|$ più piccoli (1)

3.111

$$\iint_{\bar{\Omega}} \phi(\bar{r}, \bar{\Omega}) \nabla_{\bar{\Omega}} \cdot \psi_{l,m}(\bar{\Omega}) d\bar{\Omega} = 0$$

per $\bar{\Omega}$ rivolta verso l'interno del mezzo,

\bar{r} appartenente al contorno esterno

per ogni l dispari $\leq L-2$, per ogni m

per $l=L$: per tutti gli m possibili, a cominciare dagli

$|m|$ minori

3.112

La questione degli m minori salta fuori dal fatto che
 sembra che i relativi momenti abbiano una maggior rilevanza (2).

Si osservi che abbiamo preso in considerazione solo
 le condizioni di Marshak, che in generale sono di più facile ap-
 plicazione (3).

Concludiamo rilevando che, col metodo a multigruppi,
 le suddette condizioni dovranno essere verificate per ogni grup-
 po energetico (4).

(1) Davison, op. cit., p. 168

(2) ibidem, p. 169

(3) ibidem, p. 134, 166

(4) ibidem, p. 278

3.3 APPROSSIMAZIONE A MULTIGRUPPI

Per trattare la dipendenza temporale del flusso neutronico uno dei metodi più usati ed efficienti è quello della suddivisione del range energetico (o, nel nostro caso, letargico) in più gruppi. Per far ciò è sufficiente integrare la 3.93 tra i limiti estremi di ogni gruppo energetico.

Usato l'indice k per indicare il k -esimo gruppo energetico, compreso tra u_{k-1} ed u_k , definiamo:

$$\phi_{\pm}^{(k)}(\vec{r}, t) = \int_{u_{k-1}}^{u_k} \phi_{\pm}^{(k)}(\vec{r}, u, t) du \quad 3.113$$

$$\bar{\phi}_{\pm}^{(k)}(\vec{r}, t) = \frac{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \bar{\phi}(u) \phi_{\pm}^{(k)}(\vec{r}, u, t) du}{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \phi_{\pm}^{(k)}(\vec{r}, u, t) du} \quad 3.114$$

Come si vede, mentre la 3.113 è una semplice definizione, la 3.114 è la media delle $\bar{\phi}(u)$, tra u_{k-1} e u_k , pesata sul $\phi_{\pm}^{(k)}(\vec{r}, t)$. Come già detto in precedenza, tali medie ci possono essere fornite dai codici di calcolo spettrale. Per quanto riguarda i termini successivi della 3.93, iniziamo col precisare, servendoci delle 3.35, 3.36, 3.39, 3.51, 3.58, e scrivendo il valore minimo della letargia per lo scattering inelastico in modo analogo a quello dello scattering elastico, i due termini di trasferir-

mento rispettivamente elastico ed inelastico della 3.93:

$$\begin{aligned}
 & \int_{u'} \sum_i \psi_{\pm} \varepsilon_m(\bar{r}, u', t) N_i(\bar{r}, t) b_{i\pm}(u', t) \frac{4\pi}{2l+1} du' = \\
 & = \sum_i \int_{u'+\varepsilon_{\alpha, \beta}}^u \psi_{\pm} \varepsilon_m(\bar{r}, u', t) N_i(\bar{r}, t) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{2l+1}{2} \sum_j a_{\alpha\beta j}(u') P_j \left[\mu(u-u') \right]_i \cdot \\
 & \quad \cdot P_i \left[\mu(u-u') \right] \cdot \frac{1}{4} \left[\frac{\Gamma_{l+m}}{m} e^{-\frac{1}{2}(u-u')} + \frac{\Gamma_{l-m}}{m} e^{\frac{1}{2}(u-u')} \right] du' \quad 3.115
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{u'} \sum_i \sum_j \psi_{\pm} \varepsilon_m(\bar{r}, u', t) N_i(\bar{r}, t) b_{i\pm}(u', t) \frac{4\pi}{2l+1} du' = \\
 & = \sum_i \sum_j \int_{u'+\varepsilon_{\alpha, \beta}(u)}^u \psi_{\pm} \varepsilon_m(\bar{r}, u', t) N_i(\bar{r}, t) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{2l+1}{2} \sum_j a_{\alpha\beta j}(u') \cdot \\
 & \quad \cdot P_j \left[\mu(u-u')/q \right]_i \cdot P_i \left[\mu(u-u')/q \right] \cdot \frac{1}{4} \left[\frac{\Gamma_{l+m}}{m} e^{-\frac{1}{2}(u-u')} + \frac{\Gamma_{l-m}}{m} e^{\frac{1}{2}(u-u')} \right] du' \quad 3.116
 \end{aligned}$$

Nelle 115 e 116 si riconosce che esiste un vasto gruppo di termini che sono funzioni note e facilmente integrabili di u e di u' , e che le uniche funzioni non ben note di u e di u' , anzi solo di u' , sono $a(u')$ e il flusso. Ora, mentre il

flusso è l'incognita da cercare, le $a(u')$ sono sperimentalmente note, e se quindi i dati sperimentali venissero approssimati da una serie di polinomi, o, meglio ancora, da una serie di esponenziali, cioè

$$a_l(u') = \sum_n c_{ln} e^{d_n u'} \quad 3.117$$

con c_{ln} , e, d costanti determinabili numericamente senza difficoltà, tutti i termini entro le 115 e 116 sarebbero funzioni note e facilmente integrabili di u e di u' . Ciò tuttavia non ci porterebbe grossi giovamenti, a meno che il numero dei gruppi letargici sia elevatissimo, ~~in-quante-non~~ (tale cioè da poter considerare in ciascuno di essi il flusso costante rispetto alla letargia); giacchè non possiamo eseguire l'integrazione su du' se non conosciamo la dipendenza del flusso dalla letargia: ma se conosciamo tale dipendenza, avremmo già risolto il nostro problema. Si noti anche che se il flusso non è costante entro il gruppo,

$$\int_{u_{k-1}}^{u_k} \sigma(u) \phi_{\pm l m}(ru) du \neq \phi_{\pm l m k}(rT) \int_{u_{k-1}}^{u_k} \sigma(u) du \quad 3.118$$

I casi quindi sono due: o usiamo un numero elevatissimo di gruppi energetici, o il codice spettrale deve fornirci delle:

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \left(\int_{u_{k-1}}^{u_k} \phi_{\pm l m}(ru) \frac{\pi}{2} \sum_n a_{ln} P_n[u(u-u')] P_n[r(u-u')] \cdot \left[\frac{M_1+m}{m} e^{-\frac{1}{2}(u-u')} + \frac{M_2-m}{m} e^{\frac{1}{2}(u-u')} \right] du' \right) du$$

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \phi_{\pm l m}(ru) du$$

3.119

$$\bar{\phi}_{j \rightarrow k, \mu, \bar{E}(m)} = \sum_{u_{j-1}}^{u_j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \phi_{\pm 2m}(\bar{E}'t) \frac{E}{2} \sum_{\mu} a_{\mu} \left(\frac{u}{q} \right) P_{\mu} \left[\frac{E(u-u')}{q} \right] P_{\mu} \left[\frac{E(u-u')}{q} \right] \left[\frac{M_{\pm 2m}}{m} \right] e^{-\frac{1}{2}(u-u') \frac{M_{\pm 2m}}{m}} + \frac{u-u'}{m} e^{-\frac{1}{2}(u-u') \frac{M_{\pm 2m}}{m}} du'$$

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \phi_{\pm 2m}(\bar{E}'t) du'$$

100
3 120

Abbiamo detto che il numero dei gruppi letargici deve essere ele
vatissimo. Ciò per due ragioni:

- per poter, come già detto, considerare in ciascuno di essi co
stante il flusso
- per preservare la correlazione energetico-angolare. Infatti,
come si vede dalla 3.58, $E_{\min} = E/\alpha$, ma α vale, ad es.:

Na ²³	$\alpha = 0.84$	3.120'
U ²³⁸	$\alpha = 0.983$	3.121

e quindi, presi i gruppi in modo che l'energia max di ciascun gr
gruppo sia eguale a 0.99 l'energia max del gruppo superiore, sa-
rebbero necessari 881 gruppi per passare da 7 MeV a 1 keV.

Se ne deduce anche che la distribuzione angolare dei
n scatterati, se è essenziale per la forma spaziale del flusso,
ne dettrmina invece scarsamente la distribuzione energetica.

D'altra parte la nostra trattazione, relativa alla
correlazione energetico-angolare, non è stata inutile, ma ci ha
dato delle precise indicazioni sulla struttura del codice di cal
colo spettrale, affinché questo ci dia risultati di precisione

comparabile con la precisione del nostro codice di transitorio temporale.

Anzi si può dire che abbiamo delineato la struttura anche del codice di calcolo spettrale, che differisce dal nostro essenzialmente perchè in esso non compare la dipendenza temporale, e la dipendenza spaziale è "sorvolata" con una trasformazione secondo Fourier (il mezzo si assume infinito), cioè allo sviluppo in armoniche sferiche in approssimazione P_L si sostituisce lo sviluppo in armoniche sferiche in approssimazione B_L .

Tornando al nostro codice, si può ancora definire, sempre in base alla 3.93:

$$\chi_{r,k} \bar{\sigma}_{f,j} \nu_{i,j} = \frac{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \chi_r(u) \nu_i(u) \bar{\sigma}_{f,j}(u) \phi_{00}(r u t) du' du}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} \phi_{00}(r u t) du'} \quad 3.122$$

$$\chi_{r,k} \bar{\sigma}_{f,j} \nu_{i,j} = \frac{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \chi_r(u) \nu_i(u) \bar{\sigma}_{f,j}(u) \phi_{00}(r u t) du' du}{\int_{u_{j-1}}^{u_j} \phi_{00}(r u t) du'} \quad 3.123$$

$$S_{\pm l m k}(\bar{r}, t) = \int_{u_{k-1}}^{u_k} S_{\pm l m}(\bar{r} u t) du$$

3.124

$$V_k(l m) = \frac{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \mathcal{V}_{(\pm l m)}(\bar{r} u t) du}{\int_{u_{k-1}}^{u_k} \mathcal{V}_{(\pm l m)}(\bar{r} u t) \frac{1}{v} du}$$

3.125

nella quale ultima si è posto $\pm l m$ tra parentesi in quanto a rigore v_k non dovrebbe dipendere da $\pm l m$, ma non è da escludersi a priori che, data l'approssimazione P_L , v_k sia diverso per ogni $l m$. Ciò non esclude che tale dipendenza si possa anche non prendere in considerazione, per comodità di calcolo. (Similmente per le $\sigma_{i, k}$ e per le $\sigma_{i, j \rightarrow k, l}$)

Sostituendo nella 3.93 le varie definizioni di questo paragrafo, si ottiene infine una equazione che dipende solo più dalle "consuete" variabili \bar{r} e t , opera su di esse attraverso le derivate prime, ha "memorizzato" le dipendenze energetiche ed angolari attraverso gli indici $l m k$, ha eliminato gli immaginari con l'artificio del \pm , include le correlazioni energetico-angolari attraverso le $\sigma_{j \rightarrow k}$.

$$\frac{1}{v_K(l, m)} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{\pm l, m, K}(\vec{r}, t) = \sum \phi_{\pm l, m, K}(\vec{r}, t) N_{\pm}(\vec{r}, t) \bar{\sigma}_{\pm, K(l, m)}^{\dagger}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi) \right] \right\} \mp \phi_{\mp l, m-1, K}(\vec{r}, t) \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 & \pm \phi_{\mp l, m+1, K}(\vec{r}, t) \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 & \mp \phi_{\mp l-1, m+1, K}(\vec{r}, t) \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 & \pm \phi_{\mp l+1, m+1, K}(\vec{r}, t) \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \left. \vphantom{\left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2}} \right\} + \\
 & + \sin \varphi \left\{ + \phi_{\pm l-1, m-1, K}(\vec{r}, t) \left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 & - \phi_{\pm l+1, m-1, K}(\vec{r}, t) \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 & - \phi_{\pm l-1, m+1, K}(\vec{r}, t) \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 & \left. + \phi_{\pm l+1, m+1, K}(\vec{r}, t) \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \mp
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \begin{aligned} & + \phi_{\pm 2, \dots, m-1, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\ & - \phi_{\pm 2, \dots, m-1, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\ & - \phi_{\pm \ell-1, \dots, m+1, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell-m)(\ell-m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\ & + \phi_{\pm \ell+1, \dots, m+1, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell+m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} + \\
 & + \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \begin{aligned} & \mp \phi_{\mp \ell-1, \dots, m-1, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\ & \mp \phi_{\mp \ell+1, \dots, m-1, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \\ & \pm \phi_{\mp \ell-1, \dots, m+1, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell-m)(\ell-m-1)}{2\ell-1} \right]^{1/2} \\ & \mp \phi_{\mp \ell+1, \dots, m+1, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell+m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_{\pm \ell-1, m, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{2\ell-1} \right]^{1/2} + \phi_{\pm \ell+1, m, k}(\bar{r}, t) \left[\frac{(\ell-m+1)(\ell+m+1)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \right\} \cdot (2\ell+1)^{-1/2} =$$

$$= \sum_i \sum_j \phi_{\pm \ell, m, j}(\bar{r}, t) \left(\sigma_{i, j \rightarrow k, el} + \sigma_{i, j \rightarrow k, in} \right) N_i(\bar{r}, t) +$$

$$+ 2(1-\beta) \sum_i \sum_j \chi_{k, \sigma_{p, j}} \nu_j N_i(\bar{r}, t) \phi_{00, j}(\bar{r}, t) \delta_{\ell, 0}$$

$$+ 2\delta_{\ell, 0} \sum_i \sum_r \lambda_r e^{-\lambda_r t} \chi_{r, k} \left[C_r(\bar{r}, 0) + \int_0^t e^{-\lambda_r t'} \beta_r \sum_j \nu_j \sigma_{p, j} N_i(\bar{r}, t') \phi_{00, j}(\bar{r}, t') dt' \right] +$$

$$+ \int_{\pm \ell, m, k}(\bar{r}, t)$$

3.4 DISCRETIZZAZIONE SPAZIO-TEMPORALE

L'ultimo passo nella nostra opera di trasformazione di una equazione integro-differenziale in 7 variabili in un sistema di equazioni algebriche, possibilmente disaccoppiate, consiste nel discretizzare la 3.126 rispetto alle variabili spaziali e temporale. Poichè un problema di tal genere è un classico problema di analisi numerica, esiste una grande varietà di soluzioni adottabili, per molte delle quali è possibile un'accurata analisi dell'errore (di troncatura, di roundoff, e di instabilità), nonché del numero di operazioni necessarie alla risoluzione del sistema, e conseguentemente dei tempi macchina.

D'altra parte, a causa del grandissimo numero di ~~variabili-cui-è~~ incognite cui il nostro ~~problema-ha-dato-luogo~~ procedimento ha dato luogo, ci sembra che obiettivo principale di tale discretizzazione spazio-temporale sia la costituzione di un algoritmo che non trascuri alcun dettaglio al fine di poter semplificare i calcoli, e che quindi si serva non tanto di classiche soluzioni, quanto piuttosto dei più moderni metodi dell'analisi numerica e di un'effettiva esperienza nel campo dei codici per il calcolo dei reattori nucleari. Ci sembra inoltre che non si possa in alcun modo trascurare gli effettivi dettagli costruttivi

del reattore nè l'uso preciso cui è indirizzato il nostro codice, onde, conformemente al carattere generale e di base del nostro lavoro, ci sembra opportuno mantenerci anche in questo paragrafo, anzi, soprattutto in questo paragrafo, su posizioni e metodi alquanto vaghi e sfumati, più per esplicitare l'intercorrelazione tra l'equazione neutronica e quelle che verremo determinando nella parte seconda, e per puntualizzare alcuni altri elementi, che per un'effettiva convinzione che il nostro codice vada programmato secondo le equazioni qui derivate.

È comunque evidente che il nostro codice studia essenzialmente l'evoluzione temporale di uno stato iniziale, supposto noto, in conseguenza di una perturbazione provocata o dal movimento delle barre di controllo ρ o dalla variazione del carico, e quindi dedicheremo una maggior cura per gli strumenti numerici per il calcolo dell'evoluzione temporale che non a quelli per la distribuzione spaziale, anche perchè quest'ultima ci verrà fornita da altri e la dovremo accettare nella forma in cui ci verrà fornita. Ben è vero che il porre le derivate temporali identicamente eguali a zero ci permette di conoscere uno stato a regime che possiamo supporre come stato iniziale in un istante immediatamente antecedente la perturbazione, ma la determinazione dello stato a regime è un problema enormemente difficile per il calcola

tore; non solo, ma a causa dell'arbitrarietà in esso involta non si può prescindere nè dai modelli di ottimizzazione, nè da una scelta guidata dall'effettiva esperienza progettistica di alcuni parametri, nè da una "presoluzione" del problema con teorie assai più semplici.

Ci soffermeremo quindi con un minimo di accuratezza sui metodi numerici per studiare l'evoluzione temporale - di ciò parleremo nel paragrafo 4.3 - mentre per la parte spaziale ci limiteremo ad un semplice metodo alle differenze finite centrali, consistente cioè nel porre:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_n = \frac{v(x_{n+1}) - v(x_{n-1}))}{2 \Delta x_n} \quad 3.127$$

ove $2 \Delta x_n = x_{n+1} - x_{n-1}$ e x_n : x al punto nodale n

Piuttosto, esamineremo più avanti in questo paragrafo come una semplificazione fisicamente giustificabile dell'eq. del trasporto ci porti una enorme semplificazione - formale e numerica - dell'equazione stessa. Ciò ci sembra sia perfettamente conforme con lo spirito del nostro lavoro, tendente non a dare un "pacchetto di schede perforate" ma a comprendere quali approssimazioni mostrino fisicamente un elevato grado di accuratezza e nello stesso tempo portino ad importanti semplificazioni matematiche.

Comunque, inserendo la 3.127 nella 3.126 si ottiene:
(usando una rete i cui punti nodali siano caratterizzati dagli in

dici:

p per la variabile ρ
 w φ
 q z
 n t

3.128

e in cui le distanze reticolari siano date rispettivamente da

$$\Delta p \quad \Delta \varphi \quad \Delta z \quad \Delta t$$

scriverno inoltre per semplicità, ad es.:

$$y(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

3.129

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa(l_m)}} \frac{\partial \phi_{\pm l_m \times p w q n}}{\partial t} \Big|_n =$$

$$= - \sum_i \phi_{\pm l_m \times p w q n} N_{i p w q n} \sigma_{i \kappa(l_m)}$$

$$= - \left\{ \frac{1}{4 \Delta \rho} \left[\cos \varphi_w \left(\mp \right) \left[\phi_{\pm l_m m+1 \times p+1 w q n} - \phi_{\mp l-1 m+1 \times p-1 w q n} \right] \left[\frac{(l+m)/(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \right. \\
 \pm \left[\phi_{\pm l+1 m+1 \times p+1 w q n} - \phi_{\mp l+1 m+1 \times p-1 w q n} \right] \left[\frac{(l+m+1)/(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 \mp \left[\phi_{\pm l-1 m+1 \times p+1 w q n} - \phi_{\mp l-1 m+1 \times p-1 w q n} \right] \left[\frac{(l-m)/(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 \pm \left. \left[\phi_{\mp l+1 m+1 \times p+1 w q n} - \phi_{\mp l+1 m+1 \times p-1 w q n} \right] \left[\frac{(l+m+1)/(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \\
 + \cos \varphi_w \left(+ \left[\phi_{\pm l-1 m+1 \times p+1 w q n} - \phi_{\pm l-1 m+1 \times p-1 w q n} \right] \left[\frac{(l+m)/(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 - \left[\phi_{\pm l+1 m+1 \times p+1 w q n} - \phi_{\pm l+1 m+1 \times p-1 w q n} \right] \left[\frac{(l-m+1)/(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 - \left[\phi_{\pm l-1 m+1 \times p+1 w q n} - \phi_{\pm l-1 m+1 \times p-1 w q n} \right] \left[\frac{(l-m)/(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 \left. + \left[\phi_{\pm l+1 m+1 \times p+1 w q n} - \phi_{\pm l+1 m+1 \times p-1 w q n} \right] \left[\frac{(l+m+1)/(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4p_r \Delta q_w} \left[\omega \right] \phi_w \left(+ \left\{ \left[\phi_{\pm l+1, m-1, k, p, w+1, q, n} - \phi_{\pm l+1, m-1, k, p, w-1, q, n} \right] \left[\frac{(l+m)/(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \right. \\
 & \quad - \left\{ \left[\phi_{\pm l+1, m-1, k, p, w+1, q, n} - \phi_{\pm l+1, m-1, k, p, w-1, q, n} \right] \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad - \left\{ \left[\phi_{\pm l+1, m+1, k, p, w+1, q, n} - \phi_{\pm l+1, m+1, k, p, w-1, q, n} \right] \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left\{ \left[\phi_{\pm l+1, m+1, k, p, w+1, q, n} - \phi_{\pm l+1, m+1, k, p, w-1, q, n} \right] \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \right) \right. \\
 & + \text{Im} \phi_w \left(\pm \left\{ \left[\phi_{\mp l+1, m-1, k, p, w+1, q, n} - \phi_{\mp l+1, m-1, k, p, w-1, q, n} \right] \left[\frac{(l+m)/(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \right. \\
 & \quad \mp \left\{ \left[\phi_{\mp l+1, m+1, k, p, w+1, q, n} - \phi_{\mp l+1, m+1, k, p, w-1, q, n} \right] \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad \pm \left\{ \left[\phi_{\mp l+1, m+1, k, p, w+1, q, n} - \phi_{\mp l+1, m+1, k, p, w-1, q, n} \right] \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. \left. \mp \left\{ \left[\phi_{\mp l+1, m+1, k, p, w+1, q, n} - \phi_{\mp l+1, m+1, k, p, w-1, q, n} \right] \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \right) \right) \\
 & + \frac{1}{2\Delta z_q} \left[\left(\phi_{\pm l+1, m, k, p, w, q+1, n} - \phi_{\pm l+1, m, k, p, w, q-1, n} \right) \left[\frac{(l-m)/(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\phi_{\pm l+1, m, k, p, w, q+1, n} - \phi_{\pm l+1, m, k, p, w, q-1, n} \right) \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right] (2l+1)^{-1/2} + \\
 & + \sum_i \sum_j \phi_{\pm l, m, j, p, w, q, n} \left(\bar{\sigma}_{i, j \rightarrow k, 2l} + \bar{\sigma}_{i, j \rightarrow k, 1n} \right) N_{i, p, w, q, n} \\
 & + 2(1-\beta) \delta_{q,0} \sum_i \sum_j \lambda_{ik} \bar{\sigma}_{ij} \nu_{i, j} N_{i, p, w, q, n} \phi_{0,0, j, p, w, q, n} + \\
 & + 2 \delta_{q,0} \sum_i \sum_r \lambda_{ir} e^{-\lambda_r t_n} \lambda_{rk} \left[C_{r, p, q, w, N=0} + \sum_{N=0}^n e^{\lambda_r t_N} \beta_r \sum_j \nu_{i, j} \bar{\sigma}_{ij} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot N_{i, p, w, q, n} \phi_{0,0, j, p, w, q, n} \omega_N \right] + \int_{\pm l, m, p, w, q, n}
 \end{aligned}$$

L'integrale dei ritardati è stato trattato con una formula che ~~prevede~~ non prevede il ricorso alle derivate dell'integrando, ma solo al suo valore in istanti discreti, pesato con i coefficienti w_N , che assumono valori diversi secondo la formula di integrazione usata. Tra le più note ricordiamo quella trapezoidale, quella di Simpson, quella di Gregory, quella di Hamming-Pinkham, e che si possono trovare ad es. su (1). D'altra parte è comune a tutte queste formule pesare maggiormente gli N centrali tra 0 e N , e meno gli N estremali. Ciò è del tutto discutibile nel nostro caso, a causa della crescita esponenziale del flusso neutronico, e a causa del fatto che, ~~se~~ se si esplicita la derivata a primo membro della 130 con un metodo alle differenze in avanti, si tende già a sottovalutare (in caso di flusso che crece esponenzialmente) il contributo dato appunto dal termine integrale. Inoltre, per quanto l'Hamming ritenga che sia (2) "foolish to try to imitate the fundamental definition of integration by adding enough small intervals to get the sum accurately", si deve tuttavia osservare che:

- per n sufficientemente grande l'accuratezza del calcolo è elevatissima, in quanto l'evoluzione del flusso è così rapida da richiedere intervalli di tempo Δt molto piccoli;
- per n prossimo a zero la nostra formula non è sufficientemente accurata, ma decidere quale formula sia accurata è un problema

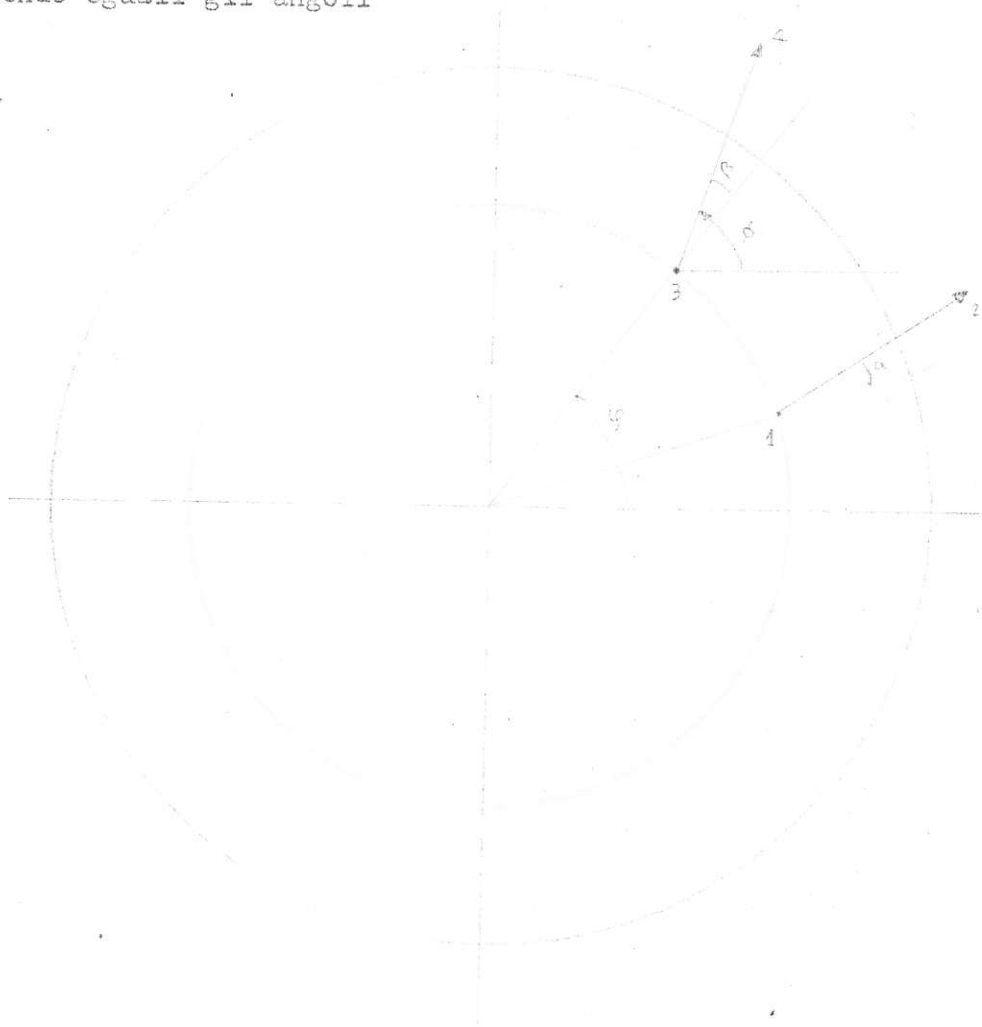
(1) Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers, p. 310 e sg.

(2) ibidem, p. 341

daccapo non tanto numerico quanto di effettiva esperienza neutronica.

Passiamo ora ad un argomento più importante: consideriamo di voler calcolare il flusso in tutto il core. Supponiamo che il core sia a geometria cilindrica. Ora, in generale, un core di tal genere è strutturalmente invariante rispetto ad una rotazione azimuthale, giacchè, mentre in direzione assiale varia la temperatura, mentre in direzione radiale varia l'arricchimento, non c'è motivo di far variare nè l'arricchimento nè la temperatura nè la composizione strutturale del core in direzione azimuthale. O meglio, è vero che procedendo lungo una circonferenza concentrica al core troveremo un core eterogeneo, nel senso che a una sbarretta segue il sodio poi un'altra sbarretta etc., ma l'effetto di ciò è solo una lieve oscillazione del flusso neutronico - presumibilmente dell'ordine di qualche % o qualche ‰ rispetto al valore medio - con lo stesso passo delle barrette. Qualche oscillazione più forte può esser data dalla presenza delle barre di controllo (tuttavia "tenui" in un reattore veloce), di rivelatori di flusso o altre simili disomogeneità, ma in generale, se non andiamo a cacciarci in simili punti singolari, possiamo ammettere con ottima approssimazione che il flusso sia azimuthalmente invariante. Vedremo meglio nel paragrafo successivo come "omogeneizzare" il core e come considerarne eventualmente d'altra

parte le piccole oscillazioni locali del flusso. Ora invece osserviamo che, come è intuitivo e come ci ha gentilmente confermato il Prof. CORNO, se il mezzo che vediamo in pianta nella figura sottostante è azimuthalmente invariante, il flusso angolare, calcolato nel punto 1 per i n che hanno la direzione 2, è eguale al flusso angolare nel punto 3 per i n che hanno la direzione 4, essendo eguali gli angoli



Prendendo l'origine dell'angolo azimuthale posizionale ψ
e dell'angolo azimuthale direzionale ϕ
sull'orizzontale, entrambi positivi in verso antiorario, si ha:

$$\phi(r, \varphi, z, \nu, \rho) = \phi(r, \varphi=0, z, \nu, \phi-\varphi) \quad 3.131$$

da cui, in base alle formule del par. 3.1

$$\phi_{em}(r, \varphi, z, u, t) = \iint \phi(r, \varphi=0, z, \nu, \phi, u, t) Y_{em}^*(\nu, \phi) d\Omega \quad 3.132$$

$$= \iint \phi(r, \varphi=0, z, \nu, \phi, u, t) F(\nu) e^{-im\phi} d\cos\nu d\phi \quad 3.133$$

$$= \iint \phi(r, \varphi=0, z, \nu, \phi-\varphi, u, t) F(\nu) e^{-im\phi} d\cos\nu d\phi \quad 3.134$$

e posto $\phi' = \phi - \varphi$ 3.135

da cui $\phi = \phi' + \varphi$ 3.136

si ha

$$\phi_{em}(r, \varphi, z, u, t) = \iint \phi(r, \varphi=0, z, \nu, \phi', u, t) F(\nu) e^{-im(\phi'+\varphi)} d\phi' d\cos\nu \quad 3.137$$

$$= e^{-im\varphi} \phi_{em}(r, \varphi=0, z, u, t) \quad 3.138$$

A questo punto, considerando che

$$\phi_{e-m}(r, \varphi, z, u, t) = e^{im\varphi} \phi_{e-m}(r, \varphi=0, z, u, t) \quad 3.139$$

e che quindi

$$\begin{aligned} \phi_{em}(r, u, t) + \phi_{e-m}(r, u, t) &= \omega \varphi^m \left[\phi_{em}(r, \varphi=0, u, t) + \phi_{e-m}(r, \varphi=0, u, t) \right] \\ &\quad - i \sin \varphi^m \left[\phi_{em}(r, \varphi=0, u, t) - \phi_{e-m}(r, \varphi=0, u, t) \right] \end{aligned} \quad 3.140$$

e ancora

$$\phi_{+lm}(\bar{r}, t) = i^{-|m|} \cos my \phi_{-lm}(j\omega z + ut) - i^{-|m|+1} \phi_{-lm}(j\omega z + ut) \sin my \quad 3.141$$

che definisce $\phi_{\pm}(j\omega z + ut)$ e

$$\phi_{-lm}(\bar{r}, t) = i^{-|m+1|} \cos my \phi_{-lm}(j\omega z + ut) - i^{-|m+1|+1} \sin my \phi_{+lm}(j\omega z + ut) \quad 3.142$$

si potrebbe, introducendo le 3.141 e 3.142 - previa discretizzazione energetica - nella 3.126, scrivendo così le due equazioni, una per il segno superiore e una per il segno inferiore, e poi rispettivamente sommando e sottraendo tali due ultime equazioni, arrivare a una equazione particolarmente semplice, a cui si può arrivare assai più facilmente per altra via, e cioè introducendo la 3.138 nella 3.78. Si ottiene così, eliminando $e^{-im\varphi}$ da tutti gli addendi, considerando anche che: $N_i(\bar{r}, t) = N_i(j\omega z + t)$

3.143

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{lm}(j\omega z + ut) + \sum_i \phi_{lm}(j\omega z + ut) N_i(j\omega z + t) \bar{v}_i(u) + \\ & + \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} - \frac{m-1}{j} \right] \left\{ \phi_{l-1, m-1}(j\omega z + ut) \left[\frac{(l+m-1)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} \right\} \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} - \frac{m-1}{j} \right] \left\{ \phi_{l+1, m-1}(j\omega z + ut) \left[\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{m+1}{j} \right] \left\{ \phi_{l-1, m+1}(j\omega z + ut) \left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{m+1}{j} \right] \left\{ \phi_{l+1, m+1}(j\omega z + ut) \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \phi_{l-1, m}(j\omega z + ut) \left[\frac{(l-m)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} + \phi_{l+1, m}(j\omega z + ut) \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \left(\frac{1}{2l+1} \right)^{1/2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{u'} \sum_i \phi_{lm}(p_0^0 e^{ut}) N_i(j\omega t) \frac{4\pi}{2l+1} \left(b_i(u')_{cl} + \sum_q b_i(u')_{in-q} \right) du' \\
 &+ (1-\beta) \int_{u'} \sum_i \chi_i(u) \nu_i(u) \bar{\sigma}_i(u) N_i(\beta) \phi_{00}(p_0^0 e^{ut}) du' \delta_{p,0} + S_{0m}(p_0^0 e^{ut}) \\
 &+ \delta_{p,0} \sum_r \sum_i \lambda_r e^{-\lambda_r t} \chi_r(u) \left[C_r(p_0^0, \beta) + \int_0^r e^{-\lambda_r t'} \beta_i(u') \nu_i(u') \bar{\sigma}_i(u') N_i(j\omega t') \phi_{00}(p_0^0 e^{ut'}) du' dt' \right] \quad 3.144
 \end{aligned}$$

Dall'equazione 3.144 gli immaginari sono spariti. Ciò non implica che le quantità in essa presenti siano necessariamente reali. Anzi ciò non è affatto vero, perchè il flusso angolare è reale, il suo momento di armonica sferica è complesso se non è m=0.

Ragionando come nel par. 3.2 possiamo porre:

$$\phi_{lm}(p_0^0 e^{ut}) + \phi_{l-m}(p_0^0 e^{ut}) = i^{|m|} \phi_{+l,m}(p_0^0 e^{ut}) \quad 3.145$$

$$\phi_{lm}(p_0^0 e^{ut}) - \phi_{l-m}(p_0^0 e^{ut}) = i^{|m+1|} \phi_{-l,m}(p_0^0 e^{ut}) \quad 3.146$$

e quindi, sostituendo le 3.145 e 3.146 nella 3.144, previamente addizionata e - rispettivamente - sottratta all'equazione che da essa si ottiene cambiando m in -m, si ha:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{\pm l,m}(p_0^0 e^{ut}) + \sum_i \phi_{\pm l,m}(p_0^0 e^{ut}) N_i(j\omega t) \bar{\sigma}_i(u) + \\
 &+ \left\{ \mp \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{m-1}{p} \right) \phi_{\mp l-1,m-1}(p_0^0 e^{ut}) \left[\frac{(l+m)/(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{m-1}{p} \right) \phi_{\mp l+1,m-1}(p_0^0 e^{ut}) \left[\frac{(l-m+1)/(l-m+2)}{2l-3} \right]^{1/2} \\
 &- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{m+1}{p} \right) \phi_{\mp l-1,m+1}(p_0^0 e^{ut}) \left[\frac{(l-m)/(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{m+1}{p} \right) \phi_{\mp l+1,m+1}(p_0^0 e^{ut}) \left[\frac{(l+m+1)/(l+m+2)}{2l-3} \right]^{1/2} \right\} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_{\pm l-1,m}(p_0^0 e^{ut}) \left[\frac{(l-m)/(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} + \phi_{\pm l+1,m}(p_0^0 e^{ut}) \left[\frac{(l-m+1)/(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} (2l+1)^{-1/2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{u'} \sum_i \phi_{\pm l m} (p_0 z u' t) N_i (p_0 z t) \frac{4\pi}{2l+1} \left[b_2(u'v)_l + \sum_{q'} b_2(u'v)_{l-q} \right] du' \\
 &+ \delta_{p,0} \int_{u'} (1-\beta) \sum_i \chi_i(u) v_i(u') \sigma_{p_i}(u) N_i(p_0 z t) \phi_{00}(p_0 z u' t) du' + \sum_{\pm l m} \phi_{\pm l m}(p_0 z t) + \\
 &+ \delta_{p,0} \sum_r \sum_i \lambda_r e^{-\lambda_r t} \chi_r(u) \left[C_r(p_0 z t) + \int_0^t e^{-\lambda_r t'} \beta_r \sum_{u'} v_i(u') \sigma_{p_i}(u) N_i(p_0 z t') \phi_{00}(p_0 z u' t') du' dt' \right]
 \end{aligned}$$

3.147

da cui, integrando come nel par. 3.3:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{v_{\kappa(l,m)}} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{\pm l m \kappa} (p_0 z t) + \sum_i \phi_{\pm l m \kappa} (p_0 z t) N_i (p_0 z t) \sigma_{i \kappa}(l m) \\
 &+ \left\{ \mp \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m-1}{r} \right) \phi_{\mp l-1 m-1 \kappa} (p_0 z t) \left[\frac{(l+m-1)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 &\quad \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m-1}{r} \right) \phi_{\mp l+1 m-1 \kappa} (p_0 z t) \left[\frac{(l-m+2)(l-m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 &\quad \mp \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{m+1}{r} \right) \phi_{\mp l-1 m+1 \kappa} (p_0 z t) \left[\frac{(l-m-1)(l-m)}{2l-1} \right]^{1/2} \\
 &\quad \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{m+1}{r} \right) \phi_{\mp l+1 m+1 \kappa} (p_0 z t) \left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{2l+3} \right]^{1/2} \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_{\pm l-1 m \kappa} (p_0 z t) \left[\frac{(l-m)(l+m)}{2l-1} \right]^{1/2} + \phi_{\pm l+1 m \kappa} (p_0 z t) \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \cdot (2l+1)^{-1/2} = \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \sum_J \phi_{\pm l m J} (p_0 z t) \left(\sigma_{i J \rightarrow l m} + \sigma_{i J \rightarrow l m} \right) N_i(p_0 z t) + \\
 &+ \delta_{p,0} 2(1-\beta) \sum_i \sum_J \lambda_{\kappa} \sigma_{p_i J} v_J N(p_0 z t) \phi_{00 J}(p_0 z t) \sigma_{i \kappa} + \\
 &+ 2\delta_{p,0} \sum_i \sum_r \lambda_r e^{-\lambda_r t} \chi_{r \kappa} \left[C_r(p_0 z t) + \int_0^t e^{-\lambda_r t'} \beta_r \sum_J v_J \sigma_{p_i J} N(p_0 z t') \phi_{00 J}(p_0 z t') dt' \right] \\
 &+ \sum_{\pm l m \kappa} \phi_{\pm l m \kappa} (p_0 z t)
 \end{aligned}$$

3.148

e infine, discretizzando sulle variabili spazio-temporali come già fatto in questo paragrafo, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{V_K(l_m)} \left. \frac{\partial \phi_{\pm l m k p q n}}{\partial t} \right|_n = \\
 & = - \sum_i \phi_{\pm l m k p q n} N_i p q n \sigma_{ix}(l_m) \\
 & - \left\{ \mp \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\Delta p_p} \left(\phi_{\mp l-1 m+1 k p+1 q n} - \phi_{\mp l-1 m-1 k p-1 q n} \right) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{m-1}{p_p} \phi_{\mp l-1 m+1 k p q n} \right] \left[\frac{(l+m)/(l+m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. \pm \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\Delta p_p} \left(\phi_{\mp l+1 m+1 k p+1 q n} - \phi_{\mp l+1 m-1 k p-1 q n} \right) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{m-1}{p_p} \phi_{\mp l+1 m+1 k p q n} \right] \left[\frac{(l+m)/(l+m-1)}{2l+3} \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. \mp \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\Delta p_p} \left(\phi_{\mp l-1 m+1 k p+1 q n} - \phi_{\mp l-1 m+1 k p-1 q n} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{m+1}{p_p} \phi_{\mp l-1 m+1 k p-1 q n} \right] \left[\frac{(l-m)/(l-m-1)}{2l-1} \right]^{1/2} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pm \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\Delta p_p} \left(\phi_{\mp \ell+1, m+1, \kappa, p+1, q, n} - \phi_{\mp \ell+1, m+1, \kappa, p-1, q, n} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{m+1}{\beta_p} \phi_{\mp \ell+1, m+1, \kappa, p, q, n} \right] \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell+m+2)}{2\ell+3} \right]^{1/2} + \\
& + \frac{1}{2\Delta z_q} \left\{ \left[\phi_{\pm \ell-1, m, \kappa, p+1, q, n} - \phi_{\pm \ell-1, m, \kappa, p-1, q, n} \right] \left[\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{2\ell-1} \right]^{1/2} + \right. \\
& \quad \left. + \left[\phi_{\pm \ell+1, m, \kappa, p+1, q, n} - \phi_{\pm \ell+1, m, \kappa, p-1, q, n} \right] \left[\frac{(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{2\ell+3} \right]^{1/2} \right\} \\
& \cdot (2\ell+1)^{-1/2} \pm + \\
& + \sum_i \sum_J \phi_{\pm \ell, m, J, p, q, n} \left(\bar{\sigma}_{i, J \rightarrow \kappa \bar{a}} + \sigma_{i, J \rightarrow \kappa i \bar{w}} \right) \frac{N_{i, p, q, n}}{L(n)} + \\
& + 2(1-\beta) \sum_i \sum_J \chi_{\kappa} \sigma_{p, i, J} v_{i, J} N_{i, p, q, n} \phi_{00, J, p, q, n} \delta_{1,0} + \\
& + 2\delta_{p,0} \sum_i \sum_r \lambda_r e^{-\lambda_r t_n} \chi_{r, \kappa} \left[C_{r, p, q, N=0} + \sum_{N=0}^n e^{\lambda_r t_N} \beta_r \right. \\
& \cdot \left. \sum_J v_{i, J} \sigma_{p, i, J} N_{i, p, q, N} \phi_{00, J, p, q, N} w_N \right] + S_{\pm \ell, m, p, q, n}
\end{aligned}$$

Le soprascritte equazioni, a partire dalla 144, non contengono più l'angolo ψ , nè le derivate rispetto ad esso. Considerando inoltre che alla stessa 3.144 si perviene con i due metodi diversi esposti a p. 114, da tutto ciò appare una conferma della validità dei nostri calcoli.

Vogliamo comunque sottolineare la grande semplicità della 147 (e seguenti) rispetto alla analoga 126 (e seguenti), semplicità che dimostra come si possa, con un'attenta investigazione della realtà fisica, pervenire a semplificazioni cospicue e anche senza stravolgere la realtà fisica e piegarla alle nostre limitate capacità matematiche. -

Quale sia la semplificazione adottata dall'ipotesi dell'invarianza rotazionale, si può quantitativamente calcolare dopo osservare dalla 3.149. Si nota che se ad es. avessimo posto un punto nodale ogni 10 gradi (spaziatura troppo stretta nel centro del core e di ~~gran lunga~~ troppo larga all'estremità di esso (nel reattore di cui alla tabella 1 ciò equivarrebbe a porre un punto nodale, ai bordi, ogni 36 cm)), avremmo avuto un numero di punti nodali - e quindi di incognite - 36 volte superiore. Inoltre avremmo avuto una equazione con molti più termini e infine avremmo sostituito una derivata analitica con una derivata numerica - con relativo "truncation error". Ci sarebbe infine del tutto sfuggita la intrinseca oscillazione azimuthale dei momenti di Legendre.

PARTE SECONDA

TERMOCINETICA

QUESTIONI INTRODUTTIVE4.1 PRODUZIONE DI CALORE NEL CORE

Lo svolgimento della prima parte - neutronica - del nostro lavoro è stato dedicato, coerentemente con le esigenze di precisione esposte nella prefazione, alla determinazione del flusso neutronico, al fine di poter calcolare la produzione di calore nel core, il che è il primo passo per la determinazione delle condizioni termocinetiche nel reattore, che sarà l'oggetto di questa seconda parte.

Ci conviene a questo punto notare che generalmente intenderemo la parola "core" in senso lato, cioè come "core" (in senso stretto) + riflettore, giacchè in un reattore veloce, breeder, la distinzione tra core (in senso stretto) e riflettore è sfumata dal fatto che, a causa dell'elevato assorbimento di n da parte del fertile presente nel riflettore e della conseguente non trascurabile presenza di atomi di fissile nel riflettore, nel riflettore stesso la produzione di calore è non nulla nè piccola come in un reattore termico, ad acqua, bensì assomma, in un reattore di poten

za (1), a circa il 13 + 22 % della produzione totale di calore nell'intero reattore.

La principale fonte di calore nel core è il processo di fissione. Chiamato

$$q''' = \frac{\text{calore prodotto}}{\text{unità di volume e di tempo}} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] \quad 4.1$$

abbiamo che:

$$q'''(\vec{r}, t) = \int_E \int_{\bar{\Omega}} N_i(\vec{r}, t) \sigma_{f_i}(E) \gamma_i(E) \phi(\vec{r}, E, \bar{\Omega}, t) dE d\bar{\Omega} \quad 4.2$$

$$= \sqrt{4\pi} \int_E N_i(\vec{r}, t) \sigma_{f_i}(E) \gamma_i(E) \phi_{oc}(\vec{r}, E, t) dE \quad 4.3$$

$$= \sqrt{4\pi} \sum_i \sum_j \sigma_{f_{ij}} N_i(\vec{r}, t) \phi_{oc_j}(\vec{r}, t) \gamma_j \quad 4.4$$

ove, conformemente alla nomenclatura della parte prima, abbiamo posto:

$$N_i(\vec{r}, t) = \frac{\text{nuclei}}{\text{unità di volume}} \quad \text{dell'isotopo } i\text{-esimo all'istante } t$$

f indice di fissione

i indice dell'elemento nucleare

j indice del gruppo energetico

$\bar{\nu}(E)$ sezione d'urto (microscopica integrale) all'energia E

(1) El-Wakil, Nuclear Energy Conversion, p. 330

energia ricoverabile per fissione. Si è supposta la sua variazione rispetto al tipo di elemento e all'energia del n fissionante. Non si esclude che una o entrambe ta li variazioni possano essere trascurate

$$\phi(r, E, \bar{\Omega}, t)$$

flusso neutronico angolare = $v N(r, E, \bar{\Omega}, t)$

ove v è la velocità del neutrone

e $N(r, E, \bar{\Omega}, t)$ il $\frac{\text{numero di neutroni}}{\text{unità di volume, di energia e di angolo solido}}$ presenti al punto r all'istante t con energia E e direzione di volo $\bar{\Omega}$

$$\int \phi(r, E, \bar{\Omega}, t)$$

flusso neutronico integrato sull'angolo

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \phi_{00j}(r, t)$$

flusso neutronico monoenergetico, ~~relative~~ relativo ai n di energia compresa tra E_{j-1} ed E_j .

Come si vede, dei momenti di armonica sferica definiti dalla 3.61; solo il primo, quello contraddistinto dagli indici $l=0, m=0$, ci serve per calcolare i parametri termocinetici. Sono dunque inutili le $(L+1)^2$ equazioni, una per ogni l ed m , con l che va da 0 a L , m da $-l$ a l , indicate nel paragrafo 3.2 e successivi? Certamente no, giacchè, come si vede, in tali equazioni, posto $l=m=0$, compaiono anche $\phi_{10}, \phi_{11}, \phi_{1,-1}$; e posto $l=1, m=0, \pm 1$, in tali tre equazioni compaiono anche i termini con $l=2$, etc. Ciò perchè l'esattezza con cui si calcola ϕ_{00} dipende dal conoscere esattamente o meno $\phi_{10}, \phi_{11}, \phi_{1,-1}$; e l'esattezza con cui si calcolano tali tre momenti dipende dal conoscere i momenti di ordine superiore, caratterizzati da $l=2$; e a loro volta l'esattezza

di questi ultimi dipende dall'esattezza con cui si conoscono quelli relativi ad $l=3$, etc. Il processo non va all'infinito non solo perchè il calcolatore non è una macchina infinita, ma anche perchè si rileva che tali momenti tendono a decrescere (in valore assoluto) sia pure più lentamente di quanto si possa gradire, (1), sicchè ad un certo punto possiamo "tagliare" e porre $\phi_{l>L} = 0$, ciò che rappresenta la "approssimazione P_L ". La approssimazione P_1 consiste ovviamente nel porre identicamente eguali a zero tutti i momenti di ordine superiore al primo, il che introduce un errore che, nel caso di un reattore veloce è, come già spiegato nel paragrafo 1.2, e come detto su (2), inaccettabile, e nel creare, attraverso la legge di Fick, un legame tra ϕ_0 e ϕ_1 -

Come detto su (3), solo circa l'80 % dell'energia totale è rilasciata nel punto e all'istante in cui avviene la fissione, e consisterebbe propriamente nell'energia cinetica dei frammenti di fissione; il resto se ne va nell':

- energia cinetica dei n pronti e ritardati
- energia della radiazione β per decadimento dei prodotti di fissione
- energia della radiazione β per decadimento dei prodotti di assorbimento
- energia della radiazione γ per decadimento dei prodotti di fissione e di assorbimento
- energia dei neutrini, non recuperabile.

(1) Weinberg-Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, p.

(2) Corno, Introduzione ai metodi di calcolo per i reattori veloci, p.16-25

(3) El-Wakil, Nuclear Heat Transport, p. 75

Come al solito, per poter dire qualcosa di più preciso è necessario essere in possesso di dati sperimentali precisi (precisi ~~pe~~ almeno nel senso che se ne conosca l'indeterminatezza, e l'errore relativo, onde evitare il rischio che tentando di fare le cose precise si aggiungano invece errori ulteriori) nonché di un'effettiva esperienza progettistica. Quindi a questo punto fermiamo la nostra discussione su tale problema concludendo che comunque la produzione di calore nel core è proporzionale alle densità nucleari $N_i(\bar{r}, t)$, nel punto in questione, al flusso integrato sull'angolo e sul gruppo energetico $\sum \rho_{ooj}(\bar{r}, t)$, quantità che abbiamo imparato a calcolare nella parte prima; e alle sezioni d'urto per i vari elementi e le varie reazioni, che naturalmente debbono essere noti sperimentalmente altrimenti non riusciamo nemmeno a calcolare il flusso neutronico. A causa di tale proporzionalità, $q'''(\bar{r}, t)$ è la somma di alcuni ~~(peschi)~~ prodotti di quantità già note e quindi non pone problemi per il suo calcolo numerico - o almeno non pone problemi ulteriori rispetto a quelli già posti da altre ben più complicate equazioni.

Non abbiamo finora precisato come calcolare $N_i(\bar{r}, t)$.

In base alla definizione 4.5, si può scrivere identicamente:

$$N_i = \frac{\text{nuclei}}{\text{unità di volume}} = \frac{\text{nuclei}}{\text{kgmole}} \frac{\text{kgmole}}{\text{kg}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad 4.6$$

$$= \text{Avogadro} (C_{12}) \frac{1}{\text{massa relativa al } C_{12}} \rho \quad 4.7$$

$$\text{essendo d'ora in avanti } \rho = \text{densità massica : kg/m}^3 \quad 4.8$$

(e quindi chiaremo la variabile radiale r , e non più ρ).

Vogliamo far osservare che la 4.6 e la 4.7 non sono identiche, giacchè nella seconda ci si è riferiti al C_{12} . (Cioè si è posto $A_{C_{12}} = 12$). Ovviamente nella 4.7 potremmo riferire il n. di Avogadro a qualsiasi altro ente che non sia il C_{12} , a patto di riferire allo stesso ente anche il calcolo dei kg/kgmole. Ricordiamo che, in base ad (1):

$$A_v = 6.022169(40) \cdot 10^{26} \text{ kgmole}^{-1} \quad 4.9$$

Noti i primi due fattori della 4.7 dalle tabelle, possiamo ricavare anche il terzo dalle tabelle se conosciamo:

- la distribuzione della temperatura in ogni punto
- la composizione del materiale in ogni punto.

Esaminiamo meglio tali due punti. La distribuzione di temperatura all'istante iniziale (a regime) noi la consideriamo nota, ed essa comunque si può ricavare dalle equazioni che se scriveremo nei successivi due capitoli ponendo in esse identicamente $\partial T / \partial t = 0$ (T temperatura), e fornendo opportune condizioni al contorno, alcuna delle quali dettate dalla necessità di evitare la fusione del combustibile, (o cambiamenti di fase), e di mantenere sufficientemente elevata la resistenza strutturale degli elementi, altre dalla necessità di evitare, anche nei transitori, l'ebollizione del sodio. Altre ancora si possono porre con i modelli di ottimizzazione, altre infine, come al solito, dalla

(1) Particle Data Group 71 - Physical and Numerical Constants, p. 13, da Rev. Mod. Phys. 41.375 (1969)

effettiva esperienza progettistica. La distribuzione di temperatura negli istanti successivi invece la ricaveremo dalle equazioni dei prossimi due capitoli.

Per quanto riguarda invece la composizione del mezzo nel punto in questione, non si può semplicisticamente concludere che in un dato punto esista poniamo il 100 % di Na e in un altro punto il 20 % di U_{25} e l'80% di U_{28} , giacchè ciò introdurrebbe una discontinuità al passaggio tra il sodio e la barra del combustibile, e nella barra stessa tra guaina e pellet. Ora, l'esistenza di una tale discontinuità, mentre non può assolutamente essere ignorata da un punto di vista termocinetico, non è detto che non possa essere ignorata da un punto di vista neutronico. Ciò introduce il problema, finora da noi mai trattato, della distinzione tra reattore omogeneo ed eterogeneo.

In neutronica, si distingue (1) tra "reattore omogeneo" (quale può essere un reattore a sali di uranio), "reattore quasi omogeneo" (cioè un reattore in cui il libero cammino medio dei neutroni è grande rispetto al diametro delle barrette), "reattore eterogeneo" (uno in cui la suddetta condizione non sia soddisfatta).

Iniziamo a calcolarci quanto può valere il libe

(1) Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, p. 310

ro cammino medio di un neutrone in un reattore veloce. Poichè l'energia media dei n è 1 MeV (1), e ammesso che il combustibile sia UC, si ha, a tale energia:

$$\sigma_t \text{ Na} = 6.36 \text{ barn} \quad \text{da (2)}$$

$$\rho_{\text{Na}(T=500^\circ\text{C})} = 834.16 \text{ kg/m}^3 \quad \text{da (3)}$$

$$\sigma_t \text{ U}_{25} = 6.76 \text{ barn} \quad \text{da (4)}$$

$$\sigma_t \text{ U}_{28} = 6.5 \text{ barn} \quad \text{da (5)}$$

$$\sigma_t \text{ C}_{12} = 2.555 \text{ barn} \quad \text{da (6)}$$

$$\rho_{\text{UC}} = 12,970 \text{ kg/m}^3 \quad \text{da (7)}$$

quindi il libero cammino medio

$$\lambda_t = 1/\Sigma_t$$

4.10

vale

$$\lambda_{t \text{ Na}} = 7.19 \text{ cm}$$

$$\lambda_{t \text{ UC}} = 3.23 \text{ cm}$$

Questa cifra non è molto grande rispetto al diametro di una bar-

(1) El-Wakil, Nuclear Energy Conversion, p. 277

(2) El-Wakil, Nuclear Heat Transport, p. 260

(3) ibidem, p. 267

(4) ibidem, p. 44

(5) Lamarsh, op. cit., p. 38

(6) ibidem, p. 35

(7) El-Wakil, Nuclear Heat Transport, p. 38

retta di combustibile, che, in un reattore veloce, è dell'ordine di alcuni mm, ma, ammesso che esso sia 6.35 mm, come da tab. 1, si avrebbe un fattore di attenuazione pari a $e^{-32.3/6.35} = 0.0061$, molto piccolo. Ciò significa che il neutrone, nato veloce in una sbarretta, ha scarsa probabilità di interagire nella sbarretta stessa, e tende ad uscirne e ad interagire nel sodio o in altre barrette, situate a qualche cm di distanza. Più in generale, il neutrone, nel suo "viaggio" tra un'interazione e l'altra (viaggio che appunto è dell'ordine di qualche cm) incontra una serie di "strati" di materiali diversi tra loro, con una probabilità tutta via molto piccola di interagire con ciascuno di essi. Se a questa serie di strati di materiali diversi noi sostituissimo una distribuzione continua, omogenea dei nuclei che li costituiscono - fermo restando il numero totale dei nuclei di ciascuna specie -, se cioè immaginassimo che la barra di combustibile fondesse e si mescolasse intimamente, perfettamente al sodio, allora non ci dovrebbe esser ragione per cui il viaggio del n nel mezzo "omogeneizato" debba mutare (rispetto al viaggio nel mezzo eterogeneo). O meglio, potrebbe eventualmente mutare il viaggio del singolo n, ma considerato un insieme statistico di n, il loro comportamento medio non muta in maniera pa apprezzabile, e ciò è tanto più vero quanto meno differiscono tra loro le proprietà nucleari dei vari mezzi presenti.

Affinchè infatti il caso del mezzo omogeneizzato e quello del mezzo reale (eterogeneo) siano - ai fini dei nostri calcoli - effettivamente di ersi, è necessario che il n possa interagire almeno due volte nella sbarretta, prima di uscirne; ma la probabilità che ciò avvenga è circa $(e^{-D/\lambda_1})^2$, dell'ordine di 10^{-5} .

E' consuetudine antica dei reattoristi considerare a priori come omogeneo qualsiasi mezzo, e questa loro assunzione è basata non tanto sul ragionamento sopraesposto quanto dal fatto che solo dall'omogeneità del mezzo (e quindi dall'indipendenza delle N_i dalla posizione) possono sperare di ricavare una soluzione analitica, speranza che per= tuttavia il più delle volte come noto va delusa. Poichè d'altra parte nelle equazioni della neutronica le densità N_i non sono mai precedute dall'operatore derivata, esse non creano dei gravi problemi nelle soluzioni numeriche, e quindi tanto vale tenerne conto, se non si dimostra la possibilità di fare altrimenti.

In realtà noi abbiamo mostrato come, con accuratissima approssimazione, si possa ~~considerare~~ considerare un reattore "quasi omogeneo" come "localmente omogeneizzato", ove per "localmente omogeneizzato" (frase da noi coniata) intendiamo, come ormai a questo punto dovrebbe essere chiaro, che in un punto \vec{r} di un reattore, la densità dei nuclei dell'isotopo i non sia data dal rapporto tra il numero dei nuclei del suddetto elemento presenti in

un volume piccolissimo - che a rigore dovrebbe essere infinitesimo - intorno al punto \bar{r} , e il volume stesso, bensì dal rapporto fra il numero di nuclei presenti (sempre dell'isotopo i -esimo) in un volume finito, di dimensioni forma e confini opportuni, intorno al punto \bar{r} , e il volume stesso. Le dimensioni di tale volume sono ovviamente legate alla spaziatura che si sceglie per discretizzare spazialmente l'equazione del trasporto; anche la sua forma è legata alla forma dell'"elemento" finito" intorno ad \bar{r} , mentre i suoi confini debbono esser tali da non provocare delle singolarità, cioè sopravvalutare l'uno o l'altro materiale presente nel core.

Ammettere - come fanno i più - che il core sia completamente omogeneo significa trascurare i seguenti fatti:

- 1) la variazione radiale dell'arricchimento
- 2) la variazione radiale del rapporto ~~fuel/moder~~ fuel/termovettore a causa dell'orificing, che (1) serve a limitare la variazione radiale di temperatura (il punto 1 come ovvio accentua il punto 2)
- 3) la variazione assiale della temperatura
- 4) la variazione assiale della densità, effetto che può essere modesto in un reattore veloce (la diminuzione di densità del sodio tra 400 e 600°C è del 5.82%), ma è già rilevante in un PWR a causa del forte potere moderante dell' H_2O , per non parlare poi dei BWR.

(1) El-Wakil, Nuclear Heat Transport, p. 380

D'altra parte anche la "omogeneizzazione locale" non è assolutamente accettabile da un punto di vista termocinetico, perchè in tal caso non vi sarebbe più distinzione tra elemento di combustibile e termovettore. Anche nell'ambito della barretta e del canale del sodio non ci sarà lecito omogeneizzare: ciò si potrà forse fare per la densità, che come noto, nei liquidi e - a maggior ragione - nei solidi, / varia poco con la temperatura, che anzi dovrà esser calcolata rigorosamente punto per punto per poter stabilire il flusso di calore.

Come conciliare le due trattazioni? E' in primo luogo evidente che la "omogeneizzazione locale" ci dà risultati neutronicamente corretti, e quindi ci dà il flusso corretto punto per punto (o zona per zona, giacchè i punti (nodali) in cui calcoleremo il flusso sono come già detto non vicinissimi); moltiplicando il flusso così ottenuto per le σ_p , o le σ_{act} , e per la densità effettiva del punto in questione si ottiene la produzione di calore nel punto in questione. Essendo così nota la produzione di calore punto per punto, in punti sufficientemente vicini ai fini della trasmissione del calore, i nostri calcoli termocinetici possono iniziare.

In secondo luogo, se proprio volessimo incrementare la precisione con cui conosciamo il flusso neutronico, possiamo prendere in considerazione, invece che l'intero reattore, che

contiene oltre 100000 barrette, per ciascuna delle quali sarebbe necessario porre delle condizioni all'interfaccia, e in ciascuna delle quali sarebbe necessario porre più punti nodali anche in direzione radiale, sicchè si avrebbe un sistema di decine o centinaia di milioni di equazioni in altrettante incognite, sistema in generale non risolubile da un calcolatore, e che comunque se anche in futuro fosse risolubile, probabilmente non darebbe risultati migliori rispetto al metodo di "omogeneizzazione locale" a causa dell'accumularsi degli errori di troncatura e di roundoff, dicevamo dunque che per incrementare la precisione del calcolo della produzione del calore potremmo calcolarci in dettaglio il flusso in alcune poche sbarrette, per una limitata lunghezza assiale (ciò si può fare utilizzando le equazioni della parte prima ponendo come condizione che per le suddette barrette il flusso medio coincida con quello già calcolato per l'intero reattore, o con metodi tipo Montecarlo, o anche con ragionamenti più semplici, del tipo di quelli che si usano per correggere i fattori p (resonance escape probability) e f (thermal utilization factor) in un reattore eterogeneo), in modo da conoscere la piccola oscillazione che subisce il flusso neutronico passando da una barretta all'altra attraverso il sodio. Si potrebbe poi con ottima approssimazione generalizzare tale piccola oscillazione a tutto il reattore sovrapponendola al flusso medio già calcolato: si otterrebbe così con grande precisione il flusso neutronico e quindi la produzione di calore in ogni punto del core.

4.2 PROBLEMI DI REGOLAZIONE

Il nostro è un lavoro di dinamica, che come tale riguarda l'evoluzione temporale di un reattore, e potrebbe quindi adattarsi allo studio di uno start-up o di uno shut-down; in realtà, è stato strutturato essenzialmente ai fini di studiare un transitorio, in particolare di poter simulare su un calcolatore la risposta del reattore a una variazione del carico di rete: in altre parole, simulare sul calcolatore la sua capacità di "seguire il carico", con prontezza, possibilmente senza l'intervento delle barre di controllo, in ogni caso senza dare luogo a oscillazioni, senza che si raggiungano in alcuna parte di esso condizioni pericolose: in altre parole, il nostro codice si propone di studiare l'affidabilità di un reattore, affidabilità che finora non è stata esaltante nemmeno nei reattori termici.

Per poter studiare un transitorio occorre innanzi tutto studiare come esso venga innescato: esso può dipendere:

- dall'inserzione o estrazione delle barre di controllo (come avviene ad es. nell'avviamento o nello spegnimento). In tal caso, ammesso ad es. che il sistema sia inizialmente a regime, il che corrisponde a porre identicamente eguali a zero tutte le derivate rispetto al tempo sia nelle equazioni della neutronica

che nelle equazioni della termocinetica, la "perturbazione" dovuta al movimento delle barre di controllo è "vista" dal nostro codice come una variazione graduale di alcune N_i , in quanto aumenta (o diminuisce) nel reattore la presenza di nuclei di materiali assorbente (Nickel o altri materiali (strutturali) di massa atomica media), e nel contempo eventualmente ~~aumenta~~ ~~o diminuisce~~ diminuisce (o ~~ap~~umenta) la presenza dei nuclei dei materiali cacciati via dalla barre di controllo: cioè il sodio, nel caso che le barre si tuffino nel sodio, o il combustibile, nel caso che la barra sia seguita da un "follower". La variazione rispetto al tempo di tali densità N_i è naturalmente, almeno negli istanti iniziali, nota (dipende dalla velocità di inserzione o estrazione) e continua; tuttavia, dal momento che la nostra soluzione è discretizzata, dovremo considerare discretizzato anche il movimento delle barre di controllo, facendone come una serie di fotogrammi istantanei, ad intervalli di tempo "convenienti". Non si può naturalmente dire quale sia un intervallo di tempo conveniente. Ciò dipende dalla velocità di movimento delle barre, dal periodo del reattore, dalla disponibilità del calcolatore: sarà il "buon senso ingegneristico" a suggerirci intervalli opportuni, e la reale esperienza a suggerirci eventuali variazioni di essi. Comunque, la variazione delle densità N_i rispetto allo stato a regime squilibra sia il sistema che le derivate che lo

simulano, e le derivate rispetto al tempo diverranno non più identicamente nulle. Dapprima varierà il flusso neutronico, in seguito, in conseguenza della sua variazione, inizierà a cambiare anche la temperatura nei vari punti del sistema, e conseguentemente anche le densità massiche; in tal modo, negli istanti successivi, la variazione delle N_i nell'equazione neutronica dipenderà sia dal movimento (noto) delle barre di controllo che dalla variazione dei parametri termocinetici (ricavata dalle equazioni termocinetiche). Come strutturare tale sistema di equazioni e soprattutto come "partire" (senza violare la derivazione delle equazioni stesse) lo vedremo nel prossimo paragrafo.

Nel caso invece che muti il carico della rete, occorre studiare:

- come risponde ad esso la parte convenzionale dell'impianto (che assumiamo sia una turbina a vapore)
- come si trasmette l'informazione della variazione del carico al core
- come può reagire il core

Per quanto riguarda il primo punto, iniziamo col notare che la variazione del carico viene "sentita" in tempo reale da sensori elettronici, che già da gran tempo (1) sono in uso nelle centrali di potenza. Il sensore quindi ci permette di regolare la turbina prima che essa venga "tirata" o "frenata" dalla

(1) POWER, ~~Plant~~ Plant des Issue 1960, p. 88

rete. Per regolare la turbina è noto che occorre:

- evitare sbalzi di temperatura
- limitare il peggioramento del rendimento (che naturalmente ha il suo massimo nelle condizioni di funzionamento a regime).

Per ridurre la potenza espressa dalla turbina occorre quindi ridurre la portata di vapore che circola in essa; per ridurre la portata occorre o chiudere la valvola di ammissione alla turbina (laminazione) o parzializzare il primo corpo della turbina (come noto, il corpo ad alta pressione della turbina è in genere ad azione e quindi parzializzabile per chiusura di qualche ugello). Entrambi i metodi peggiorano il rendimento "limite" dell'impianto, riducendo la caduta entalpica disponibile "interno o termodinamico" dell'impianto, essenzialmente perchè aumentano le perdite per urto alle palette in conseguenza dello scostarsi degli angoli cinematici dagli angoli costruttivi (1); inoltre il primo metodo comporta una diminuzione del rendimento "limite" a causa della riduzione della caduta entalpica disponibile; quindi i due metodi vengono associati, essendo l'uno continuo l'altro discreto.

Ora, stabilito che la pressione di evaporazione resta pressochè invariata per evitare sbalzi nella temperatura di

(1) Capetti, Motori Termici, p. 88

ebollizione; stabilito che è possibile mantenerla invariata agendo sulla pompa di alimentazione, che si suppone comandata da un motore elettrico a commutatore, a corrente continua, in modo da variare indipendentemente pressione e portata; ci si può domandare se anche le condizioni di ammissione dell'acqua allo scambiatore restino invariate. A ciò è difficile rispondere, a causa degli spillamenti rigenerativi; è senz'altro possibile agire su di essi in modo che la temperatura dell'acqua di alimentazione resti invariata, ma probabilmente essi vengono regolati al fine di mantenere il più alto possibile il rendimento della turbina, e non al fine di semplificare i nostri calcoli. Nelle equazioni dello scambiatore, dovremo quindi presupporre la possibilità della variazione temporale dei vari parametri.

Ora, se cambia la potenza espressa dalla turbina, \implies cambia la massa di vapore circolante \implies cambia (press'a poco nella stessa proporzione (1)) la potenza termica trasmessa dal sodio all'acqua; quindi, se non cambia nella stessa misura anche la portata del sodio secondario, questo subirà, all'uscita dal generatore di vapore, un cambiamento di temperatura; ci conviene che il sodio secondario cambi temperatura o no?

(1) essa è $\dot{m}_{H_2O} (i_{out} - i_{in})$; i entalpia massica, \dot{m} portata massica; ciò che può cambiare è i_{in} , ma la sua variazione è piccola

Intanto, non è detto che ciò debba essere a nostra completa discrezione, essenzialmente perchè, se il sodio, come probabile, circola controcorrente all'acqua, il sodio che esce ha una temperatura che dipende, oltre che dalle condizioni a monte, anche dalla temperatura dell'acqua entrante; ma ammesso che almeno entro certi limiti il fenomeno sia da noi controllabile, ed ammesso che le pompe (ad es. elettromagnetiche) ci permettano di variare indipendentemente portata e prevalenza, il problema si pone in questi termini: la variazione di temperatura del sodio secondario, a parte che comporta uno sbalzo termico, si trasmette dall'uscita del generatore di vapore, all'ingresso dello scambiatore primario, con un tempo di ritardo che è dell'ordine di L/V , ove L è la lunghezza del circuito nel tratto suddetto e V è la velocità media del sodio nello stesso tratto.

A questo punto lo stesso problema si ripropone per lo scambiatore primario: o riduciamo nello stesso tempo e nella stessa misura potenza della turbina, portata nella turbina, portata (1) nel secondario, portata nel primario, e allora le con-

(1) più esattamente che di portate massiche, si dovrebbe parlare di portate massiche moltiplicate per i rispettivi calori specifici massici: ma per piccole variazioni di temperatura - come quelle che consideriamo accettabili - la variazione del calore specifico massico del sodio è insignificante

dizioni del vapore, del sodio secondario, del sodio primario rimangono press'a poco le stesse che prima della regolazione; oppure le varie temperature cambiano: in particolare, cambierà la temperatura del sodio primario all'uscita dello scambiatore primario, e quindi cambierà la temperatura dello stesso sodio primario all'ingresso nel core.

Che cosa comporta una variazione della sua temperatura (e della sua densità)?

Come è noto, i reattori ad acqua si regolano attraverso la variazione della temperatura dell'acqua. Più precisamente, un BWR si regola variando il flusso di recircolazione: ad es., se esso aumenta, cresce ~~la=eele~~ l'altezza della colonna non bollente, diminuisce il titolo del vapore e il grado di vuoto, e, a causa del coefficiente di reattività negativo rispetto al grado di vuoto, aumenta k_{eff} e con esso il flusso neutronico e la potenza termica. Ciò è dovuto fisicamente al fatto che cresce nel reattore il rapporto acqua/vapore e quindi aumenta il potere moderatore, meno neutroni fuggono dal sistema, e più neutroni vengono rallentati all'energia termica prima di incappare nelle risonanze. (dell'U 28).

Similmente, in un PWR, con scambiatore di calore intermedio, un aumento della potenza termica estratta dal fluido

motore comporta una diminuzione della temperatura di uscita del refrigerante-moderatore dal generatore di vapore, una diminuzione della temperatura dello stesso all'ingresso del core, un aumento della densità dell'acqua nel core con relativo aumento del suo potere moderatore, una diminuzione della temperatura delle barrette con relativa entrata in gioco del coefficiente Doppler del combustibile.

Lo stesso ragionamento vale anche per il sodio? No.

No perchè l'effetto di una diminuzione di temperatura del sodio \implies aumento della densità del sodio \implies aumento del suo sia pur scarso potere moderante \implies "rammollimento" dello spettro \implies diminuzione di ν (numero dei secondari di fissione), che, come noto, è funzione crescente dell'energia secondo la formula (1)

$$\nu = \nu_0 + \alpha E \quad 4.11$$

con α e ν_0 dati dalla tabella (2).

D'altra parte, non si può negare nemmeno che l'aumento della densità del sodio comporti una diminuzione del leakage. Quale dei due effetti prevale? Lo stesso problema si pone, nei medesimi termini, per il coefficiente di reattività del sodio rispetto al suo grado di vuoto (nel caso di ebollizione accidentale). Come noto, tale coefficiente tende ad essere positivo, ma per ragioni di

(1) Lamarsh, op. cit., p. 95

(2) ibidem, p. 96

sicurezza si cerca di renderlo negativo dando una struttura al core (ad es. a pancake) tale da favorire il leakage, cosa che non pregiudica l'economia neutronica perchè come già detto altrove i neutroni che fuggono dal core vanno nel riflettore a generare. In queste condizioni non si può naturalmente escludere che anche il coefficiente di reattività relativo alla densità del sodio sia negativo β (1) e che quindi una diminuzione della sua temperatura incrementi effettivamente il flusso neutronico. D'altra parte un simile coefficiente di reattività non può che essere piccolissimo, di alcuni ordini di grandezza inferiore rispetto a quello dell'acqua, e quindi per provocare la stessa variazione di flusso occorre una ben maggiore variazione di densità e di temperatura da parte del sodio, e se avevamo detto che gli sbalzi di temperatura sono da evitare nella parte convenzionale, a maggior ragione sono da evitare nel delicatissimo e

(1) ci permettiamo di notare che il nostro codice è in grado di dare informazioni qualitative e quantitative di elevata precisione circa i coefficienti di reattività, in quanto essi appaiono dall'effettiva evoluzione che subisce il reattore in conseguenza di una data perturbazione, e non da calcoli lunghi (e inconcludenti sia qualitativamente che quantitativamente) come quelli fatti ad es. dal Lamarsh nel cap. 13 della sua già citata opera, basati sulla pur approssimatissima teoria diffusiva monocinetica.

costosissimo core. Occorre anche tener sempre presenti i rischi di ebollizione del sodio.

Esiste infine un ultimo ma grave argomento contro la autoregolazione del reattore per variazione della temperatura di ingresso del sodio: infatti, come già detto, tale variazione si trasmette con un tempo di ritardo dell'ordine di $(L/V)_1 + (L/V)_2$ ove L e V sono già stati definiti a p. 139 e 1 e 2 indicano primario e secondario. Ora, un tale tempo di ritardo non può certo essere inferiore ad alcuni secondi, ma può anche essere molto superiore (ad es. nell'Enrico Fermi il sodio impiega circa 55 secondi a percorrere l'intero primario (1)). Un tempo di ritardo dell'ordine anche solo di pochi secondi implica:

- lentezza nella regolazione, cioè nella risposta del reattore
- feedback, e quindi relative oscillazioni di potenza

Come dunque regolare il reattore? la risposta ci sembra ovvia: tutte le portate debbono essere ridotte nello stesso tempo e nella stessa misura in modo da minimizzare le variazioni di temperatura e di densità dei fluidi circolanti; poichè però il flusso neutronico non cambia certo perchè il sodio circola più lentamente, ne risulta che mentre la portata del sodio scende, la potenza termica del reattore resta invariata, e diminuendo l'

(1) El-Wakil, Nuclear Energy Conversion, p. 319

asportazione di calore da parte del sodio, la parte eccedente di potenza termica prodotta va ad innalzare la temperatura del combustibile, il che, grazie al coefficiente negativo di reattività Doppler del combustibile, causa una diminuzione del flusso neutronico.

Ci si può obiettare che anche in questo modo:

- la temperatura del sodio (almeno all'uscita) aumenta
- la temperatura della barra aumenta.

anche

Il problema è che, ammesso che entrambi i coefficienti di reattività con la temperatura, quello del sodio e quello del combustibile, siano negativi, l'uno è pronto e relativamente grande, l'altro lento e assai più piccolo. Una variazione di 10 K nel combustibile produce ben altra variazione di flusso che non una variazione di 10 K nel sodio. Non solo, ma per una barra che raggiunge una temperatura massima, all'interno, di oltre 2800 K, per l' UO_2 , e di oltre 1600 K, per l'UC, (1), una variazione di un centinaio di gradi non crea grossi problemi, mentre per il sodio una simile variazione sarebbe inconcepibile.

Per quanto riguarda il secondo punto, vogliamo far osservare che diminuendo la velocità di circolazione del sodio, nel core, i numeri di Nusselt del sodio diminuiscono, quindi dap

(1) El-Wakil, Nuclear Energy Conversion p. 330

prima il sodio mantiene la sua temperatura e la trasmissione di calore ad esso diminuisce, poi in conseguenza di ciò la temperatura della barretta aumenta; allora la trasmissione del calore riprende ad aumentare e tende a far aumentare la temperatura del sodio: ciò però presuppone che la temperatura della barretta sia come già detto salita, e quindi a questo punto sta già intervenendo il coefficiente negativo Doppler.

Certamente, non pretendiamo che il metodo esposto funzioni in caso di brusco distacco dalla rete, o comunque di sensibile calo nella richiesta. Come già detto, ci occupiamo delle normali variazioni dell'utenza che richiedono modeste variazioni di potenza. E' anche chiaro che la regolazione del reattore è più facile quando aumenta il carico (perchè in tal caso le temperature diminuiscono) che quando il carico diminuisce (perchè la temperatura massima della guaina deve restare comunque abbastanza al di sotto della temperatura di ebollizione del sodio).

Infine, vogliamo puntualizzare due questioni, l'una termocinetica e una neutronica.

Innanzitutto, se la regolazione indipendente di portata e pressione è resa possibile dall'uso di pompe di tipo opportuno, ciò non significa che la velocità di variazione della portata possa essere arbitrariamente elevata, e ciò anche per evitare il colpo d'ariete. D'altra parte, come già detto, il brusco

distacco dalla rete richiede l'inserzione delle barre di controllo, e metodi diversi da quelli descritti per la regolazione dell'impianto convenzionale (bypass, etc.), e ricadiamo praticamente nel caso accennato all'inizio di shut-down.

La seconda questione riguarda il coefficiente Doppler. Questo è negativo per quanto riguarda l'assorbimento dei neutroni nelle risonanze del 28, è positivo per quanto riguarda l'assorbimento dei n nelle risonanze del 25 con relative fissioni. Considerando che una fissione dà luogo a più di un neutrone, si è ritenuto (1) che il coefficiente Doppler sia globalmente negativo solo se l'arricchimento è inferiore a circa il 25%. A noi questo limite pare eccessivo giacchè le risonanze del 28 sono molto più alte, strette e spostate verso energie più elevate che non le risonanze del 25. Comunque, attualmente si usano arricchimenti inferiori e ciò assicura un sufficientemente grande effetto Doppler.

(1) Lamarsh, op. cit., p. 461

4.3 PROBLEMI NUMERICI

Nel par. 3.4 abbiamo indicato la derivata temporale, fatta all'istante n , semplicemente come

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_n \quad 4.12$$

Ora, dei tre dei metodi più comuni per esprimere la derivata $dy(x)/dx$ al punto ~~x_0~~ x_{0+nh} , con x_0 punto opportuno, n intero, h spazio tra due punti nodali (può variare con n , anche se per comodità di scrittura non abbiamo esplicitamente indicato tale dipendenza), e usando la notazione:

$$y(x_{0+nh}) = y(x_n) = y_n \quad 4.13$$

sono: (1)

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \quad \text{differenze finite in avanti} \quad 4.14$$

$$= \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad \text{differenze finite all'indietro} \quad 4.15$$

$$= \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \quad \text{differenze finite centrali} \quad 4.16$$

A prima vista, la 4.16 sembra la più corretta, ma è

(1) Rohsenow Hartnett, Handbook of Heat Transfer, p. 4.3

noto che affinché una formula numerica, discretizzata, sia corretta, sarebbe necessario scrivere direttamente l'equazione agli elementi finiti, e non negli elementi infinitesimi per passare poi agli elementi finiti con formulette del tipo delle 4.14-16. In effetti, occorre esaminare caso per caso:

- le implicazioni fisiche delle 4.14-16
- le implicazioni numeriche delle 4.14-16

Delle implicazioni fisiche ci occuperemo volta a volta, per i vari argomenti; delle implicazioni numeriche ci occupiamo ora.

Scritta l'equazione

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(x(t)) \quad 4.17$$

ove abbiamo usate il segno di derivata parziale in quanto ammettiamo che la x sia funzione, esplicita, anche di altre variabili oltre alla t , variabili che non abbiamo esplicitato per comodità di notazione; ove la funzione f è una relazione nota, che può coinvolgere eventualmente altre variabili oltre alla x ; e ove infine possiamo ammettere che t sia il tempo, perchè ciò contribuisce a chiarire e a precisare il nostro discorso, la 4.14 dà:

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t_n} = f(x_n) \quad 4.18$$

Ciò significa che essendo nota la funzione $f(x)$; essendo nota

la $x(t_n)$, dalla 4.13 si può facilmente dedurre, con una semplice operazione algebrica, la $x(t_{n+1})$.

La 4.15 dà invece:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t_n} = f(x_n) \quad 4.19$$

il che significa che, nota x_{n-1} , per conoscere x_n occorre risolvere l'equazione:

$$x_n - \Delta t_n f(x_n) = x_{n-1} \quad 4.20$$

che può essere un'equazione algebrica o un'equazione trascendente, ma in generale ~~non~~ comporta la risoluzione di un sistema di equazioni accoppiate; il che, se le equazioni sono lineari, si riconduce alla triangolarizzazione di una matrice. Ora, come noto, la trinogolarizzazione di una matrice $N \times N$, a poche diagonali, richiede oltre N^2 operazioni aritmetiche, quindi lunghi tempi macchina e elevata accumulazione di errori di roundoff.

Per tali motivi, si dice che il metodo 4.14 è un metodo "esplicito", mentre il metodo 4.15 è un metodo "implicito". Il metodo 4.16 si vede subito che, secondo i casi, può essere trattato come metodo implicito od esplicito. (In generale però è implicito).

Parrebbe ovvio a questo punto:

- scartare il metodo 4.15
- servirci del metodo 4.14 o, se possibile, del 4.16

In realtà, dalla seguente figura,



si vede chiaramente come il metodo 4.14 (detto anche di Eulero) non dia risultati molto accurati, nè c'è da attendersi risultati molto migliori dal metodo 4.16, se usato come esplicito.

Considerando che la figura rappresenta una crescita esponenziale - proprio come avviene per il flusso neutronico all'inizio di un transitorio - ci conviene andare alla ricerca di un metodo più accurato.

Esso dovrebbe possedere i seguenti requisiti:

- essere un metodo esplicito
- permettere una valutazione (naturalmente approssimata!) dell'errore .
- correggere almeno in parte tale errore
- esser modificabile secondo la precisione richiesta (come noto, essa viene genericamente indicata in termini di potenze di h)

Un tale metodo, anche se sembra strano, esiste, ed è il "predictor-corrector method", nella versione data dal-

l'Hamming (cfr. (1)).

Esso vale sia per singole equazioni che per sistemi di equazioni; la sua accuratezza può essere dell'ordine di h^3 h^4 h^5 etc.; anche secondo la sua precisione, la sua espressione esplicita, il numero dei calcoli che esso comporta, e il modo di farlo partire (non è infatti "self-starting") cambiano. In realtà, anche ~~essendo~~ nella sua forma più semplice, la sua accuratezza tende ad essere più del quarto che del terzo ordine, e similmente per le altre forme di ordine superiore.

Comunque, ammesso di aver stabilito il tipo di approssimazione (a noi sembra che anche il tipo più semplice, essendo press'a poco del quarto ordine, può essere usato, specie come ~~pr~~ primo tentativo) e il metodo con cui farlo partire (il Runge-Kutta e lo sviluppo in serie di Taylor sono tra i più usati) abbiamo che: (1), note ~~alle~~ le incognite all'istante n (e le incognite e le derivate ad istanti antecedenti), da ciascuna equazione si deduce immediatamente una incognita "predetta" all'istante $n+1$. Ottenute dall'intero sistema di equazioni, da un'equazione alla volta, tutte le incognite predette all'istante $n+1$, esse si rici-

(1) ci sembra che esuleremo dall'argomento della nostra tesi se dessimo una descrizione completa dei predictor-corrector method; ci limiteremo a puntualizzare gli elementi più direttamente connessi col nostro lavoro

(1) Arfken, Mathematical Methods for Physicists, p. 422

clano nelle varie equazioni, e si possono così ottenere, da ciascuna equazione, le derivate rispetto al tempo, di ciascuna incognita, derivate "predette" all'istante $n+1$.

Dalle derivate predette all'istante $n+1$, riciclate in tutte le equazioni, si ottiene, da ciascuna equazione, una incognita, "corretta" all'istante $n+1$ (corretta non nel senso di "esatta", ma da "correggere").

Infine, dal confronto tra il valore predetto e il valore corretto di ciascuna incognita, si ottiene, attraverso il "modificatore", il valore presunto "esatto" o comunque definitivo di ciascuna incognita (per incrementare l'accuratezza, si può anche iterare: ma probabilmente è meglio in tal caso stringere gli intervalli di tempo o passare ad un ~~met~~ tipo di predictor-corrector più preciso).

Oltre che di far partire il predictor-corrector method, il che è un problema numerico, occorre preoccuparsi di far partire il nostro codice, il che è un problema concettuale. Cioè, all'istante iniziale, chiamato $t=0$, il sistema è a regime, quindi nessuna quantità muta col tempo, (la variazione assai lenta delle concentrazioni nucleari è tenuta in conto dai codici di burn-up), quindi le derivate rispetto al tempo sono tutte identicamente nulle. Affinchè il sistema possa muoversi da tale posizio

ne di equilibrio, è necessario che ad un istante che possiamo chiamare 0^+ intervenga una qualche perturbazione che squilibri una qualche equazione, nella quale la derivata fatta rispetto al tempo all'istante $t = 0^+$ non sia più identicamente nulla.

Attraverso le sole equazioni in cui avviene una qualche modifica all'istante 0^+ , ci calcoliamo le relative incognite $f_i(t=1\Delta t)$, con Δt assai piccolo; tutte le incognite f_j relative alle altre equazioni, non squilibrate dalla perturbazione iniziale, saranno tali che $f_j(t_1) = f_j(t_{0^+}) = f_j(t_0)$. 4.21

All'istante successivo, t_2 , la perturbazione inizia a propagarsi, e in generale $f_{j,2} \neq f_{j,1} = f_{j,0}$, così come 4.22
anche ovviamente

$$f_{i,2} \neq f_{i,1} \neq f_{i,0} \quad 4.23$$

Negli istanti successivi il metodo procede di per se stesso.

= = =

La nostra è una tesi di dinamica che come tale si propone lo studio dell'evoluzione del reattore una volta noto lo stato iniziale, a regime. Calcolare lo stato iniziale, a regime, non è compito nostro, ma di chi progetta il reattore. Tuttavia, il nostro lavoro avrebbe scarso senso se lo stato iniziale non

si potesse determinare nè numericamente nè sperimentalmente. Più precisamente, lo stato iniziale, in quanto a regime, dev'esser noto; ma non è detto, ad es., che debba esser nota e/o ci debba esser comunicata la distribuzione spazio-energetica del flusso angolare, invece che di quello integrato sull'angolo. In effetti, il neutrone flusso integrato sull'angolo è una quantità fisicamente ed operativamente significativa, perchè correlato, anzi proporzionale (cfr. par. 4.1) alla produzione di calore nel core, mentre il flusso angolare ci serve solo a calcolare con precisione la distribuzione spazio-energetico-temporale del flusso integrato sull'angolo. Tale distribuzione potrebbe però esser calcolata dal progettista con metodi del tutto diversi (ad es. metodi statistici (Montecarlo), o anche con l'approssimazione S_N). Anche sperimentalmente la misura del flusso angolare non è affatto semplice, e non è affatto detto che debba essere uno dei parametri controllati durante il funzionamento.

In altre parole, possiamo dare per scontato che ci sia - teoricamente o sperimentalmente - noto ϕ_{00} , ed eventualmente anche $\phi_{1, \pm 1, 0}$, ma non possiamo esser certi che ci siano noti $\phi_{L>1, m}$. Ciò tuttavia non pregiudica l'uso del nostro codice, che può funzionare anche come approssimazione P_1 , e certamente ne semplifica i calcoli, ma certamente ne mortifica le prestazioni.

D'altra parte, dalle nostre equazioni, poste le derivate identicamente eguali a zero, sarebbe possibile conoscere lo stato a regime, o, più precisamente, uno stato a regime.

"Sarebbe", abbiamo detto. Da un punto di vista matematico ciò equivarrebbe a dover risolvere un sistema di moltissime equazioni tra di loro accoppiate, molte delle quali omogenee, sistema la cui soluzione conterrebbe quindi un grande numero di parametri indeterminati.

Da un punto di vista fisico ciò equivarrebbe a trovare un grande numero di composizioni critiche e di distribuzioni neutroniche, la maggior parte delle quali mal funzionanti. La determinazione dei parametri arbitrari può esser effettuata matematicamente attraverso i modelli di ottimizzazione e fisicamente in base a precise scelte legate a un'effettiva esperienza progettuale, e quindi riconduce al problema della progettazione del core, problema che evidentemente esula dalla nostra tesi, anzi da qualsiasi "tesi".

Tuttavia, nel nostro caso specifico, tali indeterminazioni possono essere rimosse attraverso la conoscenza:

- della composizione critica del core
- del flusso ϕ_{∞}
- delle temperature e velocità nel reattore

Tali quantità sono infatti presumibilmente indicate dal costruttore, e inoltre la seconda e le terze sono suscettibili di non eccessivamente difficili misure sperimentali, sono anzi parametri da controllare durante l'effettivo funzionamento del reattore.

Anche ammesso di poter così disporre di un numero di condizioni tali da rendere unica la soluzione del sistema di equazioni, con le derivate temporali identicamente eguali a zero, tale sistema resta costituito da un grande numero di equazioni accoppiate; da un punto di vista numerico la sua soluzione consiste nella triangolarizzazione di una matrice (o di più matrici) a moltissimi elementi, triangolarizzazione che come noto richiede moltissimi calcoli, lunghi tempi macchina e accumulo di errori specialmente per roundoff.

Ci sembra opportuno quindi suggerire, per la determinazione dello stato iniziale, un metodo alternativo.

Supponiamo nota la composizione critica del reattore, e di voler determinare il flusso neutronico angolare, con i vari momenti di armonica sferica.

Prendiamo come stato iniziale uno stato notissimo, e cioè quello di reattore critico a potenza zero, cioè in cui il flusso neutronico sia identicamente nullo. Ammettiamo di accen-

dere nel reattore, all'istante 0^+ , una sorgente neutronica, opportuna. Fisicamente ciò significa che, dopo un transitorio iniziale, il livello di flusso si assetta su un certo livello e su una certa distribuzione spazio-energetico-angolare, che sono proporzionali alla funzione importanza dei neutroni immessi attraverso la sorgente interna impressa dall'esterno.

Se il nostro codice funziona, lavorando col predictor-corrector method, mantenendo fissi, costanti nel tempo tutti i parametri termocinetici e le sezioni d'urto, dovremmo assistere all'"accendersi" dei vari momenti di armonica sferica del flusso e al loro stabilizzarsi verso un valore asintotico. Se il codice funziona, usando sorgenti iniettate in modi diversi, opportuni, ~~anche la distribuzione~~ si può almeno approssimativamente prevedere in linea teorica la variazione della distribuzione di flusso che esse determinano.

Si potrebbe cioè osservare se il nostro codice dà o meno risultati manifestamente non sensati. Ciò quindi, oltre che una eventuale determinazione dello stato iniziale, costituisce una "prova" del funzionamento del nostro codice.

BARRA DI COMBUSTIBILE

5.1 CONDUZIONE DEL CALORE

Nella barra di combustibile il calore si trasferisce, all'interno delle pellet, nell'eventuale interstizio tra pellet e pellet, nell'eventuale interstizio tra pellet e guaina, attraverso la guaina, per conduzione. Per studiare tale processo abbiamo a disposizione l'equazione della conduzione del calore, da applicarsi in ogni punto, con le apposite condizioni all'interfaccia tra mezzo e mezzo. Ovviamente una tale equazione non è analiticamente risolvibile. In questo paragrafo ci occuperemo di porre fisicamente le condizioni iniziali di continuità all'interfaccia; nel prossimo ci occuperemo di porre in forma discreta sia l'equazione che le sue condizioni al contorno.

L'equazione della conduzione del calore si può scrivere come:

$$c[T(\bar{r}, t)] \rho(T(\bar{r}, t)) \frac{\partial T(\bar{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left[K(T(\bar{r}, t)) \nabla T(\bar{r}, t) \right] + q'''(\bar{r}, t)$$

ove:

c	calore specifico	j/kg
ρ	densità massica	kg/m ³
T	temperatura	K
t	tempo	s
K	conduttività termica	W/mK
q'''	$\frac{\text{calore generato}}{\text{unità di volume e di tempo}}$	W/m ³

In coordinate cilindriche gli operatori gradiente e divergenza assumono la forma (1)

$$\nabla = \bar{r}_c \frac{\partial}{\partial r} + \bar{\varphi}_c \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Nell'eq. 5.1 tutte le quantità che in essa compaiono dipendono da \bar{r} e da t , mentre T e q''' dipendono esplicitamente dalla posizione e dal tempo, c , ρ e K dipendono da essi solo implicitamente, attraverso la temperatura: cioè se un dato mezzo ha in un certo punto a un dato istante una temperatura $T(\bar{r}, t)$, in quel punto e in quell'istante ha una c una ρ e una K univo-

(1) Arfken, Mathematical Methods for Physicists, p. 91

camente fissati dalla temperatura in quel punto e in quell'istante. La dipendenza di c e K è tabulata nelle tabelle.

Fortunatamente la dipendenza di tali quantità dalla temperatura è molto piccola, onde nella maggior parte dei problemi ingegneristici la si può trascurare con notevole semplificazione dell'equazione e della sua risolubilità analitica e numerica. Sfortunatamente nei reattori nucleari almeno una (e cioè K) delle tre suddette quantità varia in modo tale che trascurarne la variazione porterebbe a grossolani errori. Del resto il gradiente termico in una barra di combustibile può andare, in circa 3 mm, dai 2600°C di centro barra nel punto più caldo (UO_2) a (molto) meno degli 881°C di ebollizione del sodio.

Per dare una idea più precisa della variazione di K con T , abbiamo calcolato, servendoci di una tabella di (1) che, passando da 800 a 1400°F, K varia del:

+	4.6	%	U	
-	36.0	%	UO_2	
-	3.5	%	UC	5.2
-	35.5	%	ThO_2	

L'eq. 5.1 da noi scritta non è la più generale equazione della conduzione, in quanto presuppone:

(1) El-Wakil, Nuclear Heat Transport, p. 104

- l'isotropia del mezzo (1)
- una velocità infinita di propagazione delle perturbazioni termodinamiche (2)

La prima condizione è senz'altro accettabile nei materiali di interesse nucleare, la seconda non dà guai se non per problemi particolarissimi.

Le condizioni al contorno delle 5.1 sono:

$$T(\bar{r}, t=0) \quad \text{nota} \quad 5.3$$

$$\text{continuità di } T \text{ all'interfaccia} \quad 5.4$$

Più interessanti fisicamente e progettisticamente sono le:

$$\frac{\partial T(r=0, z, t)}{\partial z} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad T \leq T_{\text{ammissibile fuel}} \quad 5.5$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\text{condit.}} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad T \leq T_{\text{ammissibile sodio}} \quad 5.6$$

L'equazione della conduzione è tridimensionale. Tuttavia, anche in base a quanto esposto nel paragrafo 4.1, la conduzione azimuthale può ~~senz'altro~~ essere trascurata (su questo punto torneremo più in dettaglio nel par. 6.2). La variazione assiale della temperatura è molto minore della variazione radiale, ma non

(1) Eckert Drake, Analysis of Heat and Mass transfer, p. 12

(2) ibidem, p. 23

è trascurabile in un transitorio. La presenza degli interstizi e l'interfaccia pellet-cladding danno molto fastidio per una soluzione analitica quantunque approssimata, ma si trattano benissimo nella discretizzazione numerica.

Forse il metodo alle differenze finite non è il più veloce, nè il più accurato, ma indubbiamente è il più diffuso, specie nel campo della conduzione. Mentre nel campo della neutronica e della convezione del calore ci si attarda ancora alla ricerca di "accurate soluzioni analitiche" di altrettanto poco accurati modelli matematici della realtà fisica, da gran tempo si è usi risolvere i problemi della conduzioni con metodi numerici, anche di uso manuale, come quelli di rilassamento. In effetti, la popolarità di tali metodi è tale che non è difficile, in un centro di calcolo, trovare già un programma pronto per ~~eng~~ ogni nostro problema di conduzione. Anche laddove una soluzione analitica esiste, afferma il Cladding, (1) può essere più comodo e veloce ricercarne una numerica.

Sarebbe quindi ridicolo se ci mettessimo a discretizzare una equazione che si trova già discretizzata su moltissimi testi. Ci limitiamo quindi a ricopiarla dal Clausing (2), che dà la forma più utile ai nostri fini, in coordinate cilindriche, per un mezzo a proprietà fisiche variabili. Sottolineiamo che da ora

(1) Eckert-Drake, op. cit., p. 128, da Clausing, Numerical Methods in Heat Transfer, in Chao, Advanced Heat Transfer, p. 157-216

(2) ibidem, p. 131 e 133

in avanti gli indici i, j, k , che nella prima parte avevamo usato per altri scopi, li useremo come indici spaziali. Unica eccezione, le N_I .

La 5.1 assume dunque la forma

$$\begin{aligned} \rho c \Delta V \left. \frac{\partial T_{ijk}}{\partial t} \right|_n &= \frac{T_{i-1, j, k, n} - T_{i, j, k, n}}{R_{i-1/2}} + \frac{T_{i+1, j, k, n} - T_{i, j, k, n}}{R_{i+1/2}} + \\ &+ \frac{T_{i, j-1, k, n} - T_{i, j, k, n}}{R_{j-1/2}} + \frac{T_{i, j+1, k, n} - T_{i, j, k, n}}{R_{j+1/2}} + \frac{T_{i, j, k-1, n} - T_{i, j, k, n}}{R_{k-1/2}} + \\ &+ \frac{T_{i, j, k+1, n} - T_{i, j, k, n}}{R_{k+1/2}} + q''' \Delta V \end{aligned} \quad 5.7$$

ove

$$r = i \Delta r \quad 5.8$$

$$y = i \Delta y \quad 5.9$$

$$z = k \Delta z \quad 5.10$$

$$\Delta V = r \Delta r \Delta y \Delta z \quad (r \neq 0) \quad 5.11$$

$$R_{i-1/2} = \Delta r / (r_i - \Delta r/2) \Delta y \Delta z \quad 5.12$$

$$R_{i+1/2} = \Delta r / (r_i + \Delta r/2) \Delta y \Delta z \quad 5.13$$

$$R_{j-1/2} = r_i \Delta \phi / \Delta r \Delta z \quad 5.14$$

$$R_{j+1/2} = r_i \Delta \phi / \Delta r \Delta z \quad 5.15$$

$$R_{k-1/2} = \Delta z / \Delta r \Delta \phi \quad 5.16$$

$$R_{k+1/2} = \Delta z / \Delta r \Delta \phi \quad 5.17$$

Per quanto, dei molti testi che si occupano di metodi numerici per la conduzione del calore, il Clausing sia, fra quanti da noi trovati, di gran lunga il più approfondito, le eq. 5.8-17 presentano, a nostro avviso, qualche difetto.

Prima di elencarli, premettiamo che, in base alle nostre ipotesi di invarianza rotazionale, si pone:

$$\Delta \varphi = 2\pi \quad 5.18$$

inoltre q''' nella guaina può esser posto = 0, ma se ne potrebbe anche tener conto, per i seguenti motivi:

- il materiale strutturale è un forte assorbitore di n veloci
- q''' può permettere di tener conto dell'irraggiamento (termico, cioè attraverso onde elettromagnetiche).

Lasciando alla prova dei fatti la decisione se porre q''' eguale o meno a zero, torniamo alle osservazioni sulle formule di pagina precedente.

Innanzitutto, esse prevedono intervalli di eguale spaziatura. Ciò può costituire una piccola semplificazione, ma può anche provocare una perdita di precisione del calcolo - o uno spreco di tempo macchina. D'altra parte il problema di come e quanto spaziare i punti nodali è un problema molto difficile che come al solito si appella più che altro all'esperienza. Ci sono però due

punti in cui una simile spaziatura difetta: al centro e alla periferia della barra. Al centro barra sarebbe molto facile porre analiticamente la condizione $(dT/dr)_{r=0} = 0$, ma una simile condizione è molto difficile da porre numericamente. Parrebbe che una soluzione fosse quella del definire un punto di coordinate $j = -1$, in modo da poter imporre la condizione di simmetria:

$$T_{J=-1} = T_{J=+1} \quad 5.19$$

ma a conti fatti si vedrebbe che la 5.19 non aggiunge nulla di nuovo alla 5.7. Conviene quindi porre un punto nodale vicino al punto $j=0$, ad es. porlo a $\Delta r/2$.

Vicino al bordo ci sono due fatti che danno fastidio:

- la discontinuità nella derivata
- l'eventuale presenza di condizioni al contorno che impongano una data temperatura superficiale

A causa di quest'ultima possibilità, sia il Clausing che (1) consigliano di porre un punto nodale a distanza $\Delta r/2$ dal bordo, ed eventualmente considerare il punto sul bordo, che esprime la continuità della temperatura fra i due mezzi adiacenti, come privo di condensatore, cioè come se ad esso si applicasse la sola equazione a regime. In realtà, ci sembra che quest'ultima soluzione riguardi solo il caso di una temperatura superficiale

(1) Rohsenow Hartnett, Handbook of Heat Transfer, p. 4. 53

prescritta da condizioni esterne al sistema, e quindi lasciamo il "condensatore" anche a tale punto. Una condizione di tal genere può invece valere per i z estremali.

Mentre parliamo di punti al bordo ci conviene anche indicare come si esprime d'equazione del punto al bordo: l'eq. è sempre la 5.7, solo che la quantità $g \Delta V$ implica un contributo da parte del mezzo che sta da una parte e un contributo da parte del mezzo che sta dall'altra parte; per tale punto al bordo, ammesso di indici i j k:

$R_{i-\frac{1}{2}}$ è riferita al combustibile

$R_{i+\frac{1}{2}}$ è riferita alla guaina

$R_{k\pm\frac{1}{2}}$ (come pure le eventuali $R_{j\pm\frac{1}{2}}$) si calcolano tenendo conto che esse in realtà sono due resistenze in parallelo, una nel combustibile e una nella guaina. In tutte queste resistenze si deve (e si può facilmente) tener conto anche delle resistenze di interstizio.

All'interfaccia sodio guaina, la resistenza del sodio è espressa ancora allo stesso modo, giacchè nel cap. 6.2 useremo l'equazione dell'energia, e non l'equazione di Newton, per calcolarci la temperatura del sodio.

In direzione assiale, per tener conto degli interstizi tra pellet e pellet, conviene che Δz sia multiplo dell'altezza

za di una pellet.

Come già detto nel par. 4.3, il predictor-corrector method, che ci sembra necessario per la determinazione del flusso neutronico la cui crescita esponenziale non può in generale esser tenuta in sufficiente conto da un metodo alle differenze in avanti, sia pure ad intervalli temporali strettissimi, non è necessariamente detto che sia necessario anche per il calcolo dell'evoluzione della temperatura della barra (e/o del sodio). Ciò è tanto più vero se sia per le equazioni della termocinetica che per quelle della neutronica si adottano gli stessi intervalli temporali.

E' noto (1) (2) comunque che un metodo alle differenze finite in avanti può portare ad una violazione del 2° principio della termodinamica, se l'intervallo temporale prescelto è troppo grande rispetto alla spaziatura stabilita. Ciò si esprime matematicamente dicendo che (3):

$$\text{se } \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t} (T_{0, n+1} - T_{0, n}) = \sum_{s=1}^m \frac{T_{s, n} - T_{0, n}}{R_{s, 0}} \geq 0 \quad 5.20$$

ove l'indice 0 indica un punto nodale e s gli m punti nodali a lui circostanti,

(1) Rohsenow Hartnett, op. cit., p. 4.55

(2) Eckert Drake, op. cit., p. 218

(3) ibidem, p. 219

allora
$$\sum_{j=1}^n \frac{T_{s,j} - T_{0,j+1}}{R_{s,j0}} \geq 0 \quad 5.21$$

Il rapporto intervallo spaziale/intervallo temporale si calcola facilmente nel caso di rete cartesiana con $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, ottenendo: (1)

caso monodimensionale $M \geq 2 \quad 5.22$

caso bidimensionale $M \geq 4 \quad 5.23$

caso tridimensionale $M \geq 6 \quad 5.24$

con
$$M = (\Delta x)^2 \rho c / k \Delta t \quad 5.25$$

Ovviamente, nel nostro caso, la condizione 5.21 deve esser verificata :

- per gli elementi volumici più piccoli
- per gli elementi più soggetti a inversione del flusso termico

(1) Rohsenow Hartnett, op. cit., p. 55

TERMOVETTORE (SODIO)6.1 EQUAZIONI GENERALI

Per calcolare i parametri fluidodinamici e termocinetici del sodio abbiamo a nostra disposizione le equazioni generali di conservazione (o di continuità): della massa, della quantità di moto, dell'energia. Per quanto non è detto che esse siano notissime a tutti, e potrebbe quindi essere utile se le derivassimo, così come avevamo fatto per l'equazione del trasporto, ce ne asteniamo per due ragioni: in primo luogo perchè una siffatta derivazione sarebbe molto lunga, in secondo luogo perchè ci sembra più "efficiente" rinviare il lettore non esperto di termocinetica ad uno dei molti testi che ricavano le suddette equazioni in modo rigoroso e soprattutto molto chiaro. Nè ci sembra di aver particolarmente privilegiato l'equazione del trasporto, in quanto la sua derivazione mirava a chiarire concettualmente alcuni punti nonchè ad intenderci bene sulla nomenclatura.

Crediamo comunque di far cosa gradita al lettore ri-

portando le suddette equazioni di conservazione in una forma che, se non è la più generale possibile (la forma più generale consisterebbe nell'introdurre i coefficienti tensoriali h_i (componenti del tensore metrico, o fondamentale, del sistema di riferimento in coordinate generali)), è certamente chiara e significativa: dovrebbe apparire evidente che le tre equazioni rappresentano, rispettivamente, il significato fisico dell'operatore divergenza, la legge di Newton $F = dp/dt$, il bilancio di potenze termiche e meccaniche entranti e uscenti dal volume di controllo $d\bar{r}$ intorno ad \bar{r} nell'intervallo di tempo dt intorno a t .

Equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad 6.1$$

Equazione di conservazione della quantità di moto

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \quad 6.2$$

con p_{ij} definiti dalle equazioni di Stokes:

$$p_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \mu' \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad 6.3$$

Equazione di conservazione dell'energia:

$$\rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \frac{\partial p_s}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + q''' + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\rho}{2} \frac{dv^2}{dt} + j \frac{du}{dt} \quad 6.4$$

nelle quali si è assunta la convenzione di Einstein secondo cui un indice ripetuto in un'espressione monomia sottintende una somma toria su quell'indice, e in cui:

ρ	densità massica	kg/m ³
t	tempo	s
\vec{v}	velocità	m/s
v_i	componente della velocità	m/s
\vec{F}	forza/unità di massa	m/s ²
\vec{g}	accelerazione di gravità	m/s ²
p	pressione statica	N/m ²
p_{ij}	sforzo di taglio agente sulla superficie normale a i in direzione j	N/m ²
μ	coefficiente di viscosità dinamica	kg/ms
μ'	secondo coefficiente di viscosità dinamica	kg/ms
q'''	$\frac{\text{calore prodotto}}{\text{unità di volume e di tempo}}$	W/m ³
K	conduttività termica	W/mK
u	energia interna	j/kg
T	temperatura	K

Questo è un sistema di 5 equazioni nelle 6 incognite:

$$\rho, p, \bar{v}, T$$

ove però ρ, p, T sono legati dalla sesta equazione, quella di stato. q'' si assume noto, μ, K, u sono funzioni di T . Tutte queste quantità dipendono, direttamente o attraverso T , da \bar{r}, t .

Un tale sistema di equazioni non è praticamente risolvibile da un calcolatore. Ci conviene quindi subito cercare modelli semplificati.

Una prima semplificazione si ha se il fluido ha proprietà costanti, cioè se ρ, μ, K non dipendono dalla temperatura. Ciò per il sodio è abbastanza vero per ρ e per K , ma non per μ . D'altra parte, la semplificazione adottata è tale da obbligarci a considerare costante μ , definendolo opportunamente, come faremo nel paragrafo 6.2. Infatti, se le proprietà del fluido sono costanti, cioè non dipendono da T , ρ è noto, e le eq. 6.1 e 6.2 bastano a ricavare le quattro incognite \bar{v} e p . Ciò fisicamente significa (1) che la trasmissione del calore è sovrapposta al moto del fluido, e non lo modifica in alcun modo. Purtroppo nel fluido a proprietà variabili incapperemo nel par. 6.5, quando prenderemo in considerazione il generatore di vapore.

(1) Eckert Drake, Analysis of Heat and Mass Transfer, p. 265

Una seconda semplificazione è data dal concetto di strato limite. Non stiamo qui ad allustrarlo, perchè notissimo. Ricordiamo solo che esso presuppone le seguenti assunzioni: (1)

- lo spessore dello strato limite sia molto piccolo rispetto a una lunghezza caratteristica del corpo
- la componente di velocità normale alla superficie sia molto minore della componente di velocità parallela alla superficie
- il numero di Reynolds Re sia elevato.

Una terza semplificazione è data, nel caso che il flusso sia turbolento, dalla distinzione tra quantità fluttuanti e quantità medie. Si suppone cioè che ad. es., la velocità u sia scomponibile in una velocità media \bar{u} e in una velocità fluttuante u' (2):

$$u = \bar{u} + u' \quad 6.5$$

con

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt \quad 6.6$$

ove T è un periodo di tempo sufficientemente lungo perchè:

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u' \, dt = 0 \quad 6.7$$

(1) Rohsenow Hartnett, op. cit., p. 43.8

(2) D'ora in avanti non avremo più occasione di incontrare vettori, e la sopralineatura indicherà il valormedio.

Considerata però un'altra componente della velocità, ad essa normale, chiamiamola v , in generale:

$$\overline{u'v'} \neq 0 \quad 6.8$$

Una quarta ipotesi semplificativa è quella di assumere il moto come essenzialmente ~~un~~ bidimensionale. Torneremo nel par. 6.2 su tale assunzione per giustificarne l'uso.

Una quinta ipotesi semplificativa è quella di trascurare quantità molto piccole rispetto ad altre, come ad es. $\frac{1}{2}\rho u^2$ e ρg per piccoli dislivelli, e $\frac{1}{2}\rho v^2$ rispetto alle entalpie o alle energie interne, per un liquido.

Con tutte le ipotesi semplificative adottate, abbiamo, in un sistema di riferimento cilindrico (1),
ove u e z sono parallele alla direzione del flusso
 v e r sono perpendicolari ad essa

$$r \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial(r\bar{v})}{\partial r} = 0 \quad 6.9$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{v} \frac{\partial(\bar{u})}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_{rr}}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} - \rho \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial r} \quad 6.10$$

(1) abbiamo derivato le eq. 6.9-12 confrontando il Rohsenow Hartnett, cap. 8, che deriva tali equazioni a regime in coordinate generali, con l'Eckert Drake, che le deriva in transitorio in coordinate cartesiane

$$\left(\text{si è assunto } \bar{p} + \overline{\rho v'^2} = p_{\text{statica}} \right) \quad 6.11$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) = k \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} - \rho C_p \frac{\partial}{\partial r} \overline{T'v'} + q'' \quad 6.12$$

Vogliamo far osservare che se si volesse tener in conto la variazione della ρ , l'eq. 6.9 si trasformerebbe in

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{v} \bar{\rho}}{\partial r} = 0 \quad 6.13$$

mentre nelle altre equazioni ρ resterebbe fuori dal segno di derivata.

Per tener conto della variazione di k :

$$k \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\bar{k} \frac{\partial}{\partial r} \bar{T} \right) \quad 6.14$$

Per noi sarebbe certamente molto comodo - e probabilmente raccogliremmo anche meno critiche - se per calcolare la trasmissione di calore nel core ci affidassimo alla legge di Newton della convezione:

$$q'' = h \Delta T \quad 6.15$$

con ovvio significato dei termini, dando il coefficiente di scambio termico h in funzione di Nu (numero di Nusselt) e dando Nu con una oportuna espressione algebrica coinvolgente i numeri di Reynolds Re e di Prandtl Pr . In realtà, per fare ciò, avremmo dovuto trovare tra autori diversi e diagrammi diversi un ragionevole accordo sulla dipendenza funzionale di Nu (per il sodio) da Re e da Pr . Noi un tale accordo non l'abbiamo trovato, e non possiamo non ritenere che la ricerca sperimentale del Nu per varie condizioni di funzionamento, di temperatura, di velocità, di disposizione geometrica, oltre ad essere sperimentalmente costosissima, rappresenta una forzatura della realtà fisica, giacchè attraverso h si pretende di rappresentare con la legge della convezione un processo di trasferimento di calore che avviene, nel sodio, nelle condizioni di un reattore, essenzialmente per conduzione, con un gradiente termico che può raggiungere i 100 K/mm, assolutamente inconsueto per problemi ingegneristici.

D'altra parte, equazioni basate sulla 6.15, le adotteremo nel calcolo per lo scambiatore primario, ove i gradienti di temperatura sono minori, gli esperimenti più facili, e molto meno costosi, e ove soprattutto non esiste l'accoppiamento neutronico-termodinamico-fluidodinamico, che è responsabile dell'evoluzione in transitorio del reattore e della sua auspicata auto regolazione. Quindi, se si potesse determinare h con sufficiente esattezza, si potrebbero utilizzare le eq. le par. 6.4 anche per il core,

Ora comunque seguiamo una strada diversa, basata sulle equazioni generali del paragrafo 6.1. Prima ci sembra però necessario determinare almeno approssimativamente la struttura delle barre di controllo.

Ci riferiamo come al solito al modello della tab. 1. In essa non è specificato se le barre siano disposte a triangolo o a quadrato, comunque, definito:

r raggio barretta

s passo barrette (definito come la metà della distanza tra il centro di una barretta e il centro della barretta a lei più vicina)

D_e diametro idraulico equivalente

A_f area effettiva di flusso del sodio relativa ad ogni barretta

P perimetro bagnato

con:

$$D_e = \frac{4 A_f}{P} \quad 6.16$$

si ottiene:

per la disposizione a triangolo

$$D_e = r \left[\frac{4\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{s}{r} \right)^2 - 2 \right] \quad 6.17$$

$$s = 5.2217 \text{ mm} \quad 6.18$$

$$s/r = 1.645 \quad 6.19$$

$$D_e = 12.54 \text{ mm} \quad 6.20$$

per la disposizione a quadrato:

$$s = 4.86 \text{ mm} \quad 6.21$$

$$s/r = 1.53 \quad 6.22$$

$$D_e = 12.57 \text{ mm} \quad 6.23$$

A 500°C si avrebbe quindi:

$$Re = 145,420 \quad 6.24$$

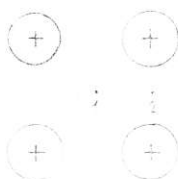
$$Pr = 0.0046 \quad 6.25$$

$$Pe = 669 \quad 6.26$$

Dai diagrammi (1) si osserva che per tali s/r i coef-

(1) Rohsenow Hartnett, op. cit., fig. 7.113 e 114

i coefficienti di attrito f sono pressochè identici a quelli per un tubo circolare, onde se ne deduce che da un punto di vista cinetico l'usare metodi collaudati essenzialmente per il flusso entro un tubo, e non intorno ad una sbarra, non dovrebbe portare a grandi errori; dal diagramma (1) osserviamo che se il moto fosse laminare, per un tale $s:r$, il flusso q'' subirebbe un'oscillazione azimuthale inferiore al 5-10 %; poichè invece il moto è fortemente turbolento, assistiti in ciò anche da quanto detto su (2), ci sembra di ~~non~~ esser autorizzati a non considerare la variazione azimuthale nè di q'' nè di T , variazione che ci obbligherebbe a tener conto delle corrispondenti variazioni azimuthali anche nella conduzione di calore entro la barretta, aumentando notevolmente il numero delle equazioni ~~e-èe~~ che ~~debe~~ il calcolatore deve risolvere.



In effetti, dalla figura è manifesto che se esistesse solo la conduzione, i punti 1 e 2 non potrebbero non avere temperatura diversa; a causa però del "mixing" che a tali Re ,

(1) Rohsenow Hartnett, op. cit., fig. 7.116

(2) ibidem, ~~#g=7~~. pag. 7.136

e nella probabile presenza di "spacers" adatti appunto a promuovere il mixing, si può ritenere che la temperatura dei punti 1 e 2 sia, a parte le fluttuazioni istantanee, eguale, anche senza coinvolgere un processo di conduzione azimuthale.

L'area occupata dal sodio che compete a ciascuna barretta non è rotazionalmente invariante, anche se è rotazionalmente simmetrica. A noi preme limitare i calcoli ad alcune poche barrette campione e all'area di sodio che circonda ciascuna di esse, giacchè, se ci mettessimo a fare i calcoli per tutte le oltre 100,000 barrette, i nostri conti non starebbero nel calcolatore, e faremmo calcoli inutili perchè:

- barrette che hanno eguale distanza dal centro del reattore hanno con ottima approssimazione le stesse condizioni neutroniche e termocinetiche
- a causa della lenta variazione radiale di temperatura e di flusso barrette radialmente vicine si trovano nelle stesse condizioni neutroniche e termocinetiche.

Per rendere l'area del sodio competente a ciascuna barretta rotazionalmente invariante, ci sembra che basti sostituire l'effettiva sezione di passaggio con una sezione virtuale, circolare, di area eguale ad $A_{\text{eff}} A_{\text{I}}$, definita a pag. 178.

Ammesso che le variazioni di temperatura azimuthali

siano trascurabili, ciò non significa ancora che siano trascurabili anche le velocità azimuthali, che sono certamente non nulle se esiste il mixing; saremmo quindi costretti, anche nell'approssimazione dello strato limite, ad usare piuttosto le complicate equazioni tridimensionali che non quelle assai più semplici bidimensionali; si può tuttavia osservare che, per ragioni di simmetria, i valori medi di tali velocità azimuthali sono nulli nella maggior parte dei punti; e per ragioni di continuità, sono molto piccoli negli altri punti; i valori di fluttuazione ci sembra possano essere inclusi nei coefficienti ϵ_M ϵ_H (anzi non vediamo come sperimentalmente si possa distinguere nettamente tra fluttuazioni azimuthali e fluttuazioni radiali); confortati anche da ciò che dicono Rubesin e Inouye, (1), circa i problemi tridimensionali assisimmetrici, ci sembra di poter con ottima approssimazione trascurare le velocità azimuthali e usare le equazioni bidimensionali.

Per quanto riguarda l'approssimazione dello strato limite, essa, data la struttura geometrica sopraesposta del core, è senza dubbio applicabile, e si può sperare che dia risultati precisi anche nella "entry-length", ove, come noto, la variazione di Nu è fortissima.

Non neghiamo che esistano altri metodi di calcolo mol-

(1) Rohsenow Hartnett, op. cit., p. 8.177 e 180

to migliori di quello da noi qui seguito (vogliamo in particolare riferirci alla possibilità di usare equazioni integrali invece che differenziali, e a metodi analoghi a quelli seguiti dal gruppo di Spalding (1)): noi abbiamo indicato un modo di risolvere il problema, modo che a noi sembra accurato, sensato, e adatto a una soluzione numerica; non era nelle nostre intenzioni - e nelle nostre possibilità - trovare il migliore dei modi.

Nelle equazioni 6.10-12 occorre eliminare le quantità fluttuanti correlandole con altre quantità presenti nelle stesse equazioni. Ciò è fatto introducendo usualmente la "diffusività turbolenta della quantità di moto" ϵ_M e la "diffusività turbolenta del calore" ϵ_H attraverso le:

$$-\overline{u'v'} = \epsilon_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \quad 6.27$$

$$-\overline{T'v'} = \epsilon_H \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \quad 6.28$$

$$\frac{\epsilon_M}{\epsilon_H} = Pr_T \quad 6.29$$

ove Pr turbolento è ^{note} tabulato anche se con una certa approssimazione.

(1) S.V. Patankar, D.B. Spalding, Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, Morgan-Grampian, Londra, 1967

A.D. Gosman, W.M. Pun, A.K. Runchal, D.B. Spalding, M;W. Wölfshstein, Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows, Academic, Londra, 1969

Sostituendo le 6.27-29 nelle 6.9-12, ~~e-cambiate-~~ ed ~~eliminate-la-so-~~
~~pralineatura~~, otteniamo: (la sopralineatura è superflua)

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{v} \bar{p})}{\partial r} = 0 \quad 6.30$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p_{st}}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \rho \frac{\partial}{\partial r} \epsilon_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \quad 6.31$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial z} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \rho c_p \frac{\partial}{\partial r} \epsilon_H \frac{\partial T}{\partial r} + q''' \quad 6.32$$

Avendo ammesso costanti le proprietà fisiche, il sistema delle
suddette si spezza nelle equazioni 6.30 e 31 che danno le incogni-
te cinetiche u v p , e nella 6.32 che dà la T . Tuttavia, due equa-
zioni non potranno mai dare tre incognite. Che cosa è successo? E'
successo che nell'analisi dimensionale la dipendenza di p da z e
da t è stata persa, e se ne deduce che $p(z, t)$ è prescritta dal
"flusso inviscido" che sta oltre lo strato limite. Nel nostro ca-
so non abbiamo alcun flusso inviscido e quindi dovremo dare empiri-
camente la relazione di p con z , mentre la relazione di p con t
viene fissata dallo stato iniziale (chiariremo meglio più avanti
questo punto). Anche con questa precisazione, ammessa nota la p ,
il sistema delle eq. 6.30 e 31 è assai mal posto. Da un punto di
vista analitico sono due equazioni differenziali alle derivate
parziali accoppiate; da un punto di vista numerico compaiono quan-

tità molto grandi ~~vie~~ ($u, du/dr$), vicino ad altre molto piccole, ($v, du/dz$). In tali condizioni una soluzione numerica non è affatto facile.

Esiste, come vedremo tra poco, la possibilità di conoscere una abbastanza accurata relazione analitica di u con r . Essendo empiricamente noti anche $\frac{\partial \rho}{\partial z}$, ρ , r , T , si potrebbero porre eguali a zero le derivate temporali, sostituire la 30 nella 31 e ricavare così v . A causa del fatto che l'equazione è alle derivate parziali, si otterrebbe un sistema di equazioni algebriche non disaccoppiate. La determinazione di v dovrebbe essere ripetuta per ogni punto nodale sia in direzione assiale che in direzione radiale. In transitorio le cose si complicano ulteriormente, nè possiamo fare l'ipotesi $v = \text{costante}$ rispetto al tempo perchè v moltiplica due fattori molto grandi: du/dr e dT/dr .

A nostro giudizio è possibile calcolare in modo piuttosto accurato (e semplice) v e u in questo modo:

il sodio entra nel reattore a circa 400°C e ne esce a circa 600°C . Subisce un decremento di densità dell'ordine del 6%. Preferiamo non trascurarlo. Ammettiamo che, come probabile, la sezione di passaggio del sodio non vari in direzione assiale. (Se muta, ciò modifica appena il nostro ragionamento).

In base all'equazione di continuità della massa, a regime, per moto unidimensionale:

$$\dot{m} = \rho A \dot{u} = \text{cost} \quad 6.33$$

Che il flusso nel core sia essenzialmente unidimensionale pare evidente; ma anche in transitorio $\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong 0$; quindi la 6.33 vale in ogni caso con ottima approssimazione, se il sodio non bolle. Ammettiamo noto lo stato iniziale. In un istante successivo, $t=t_0$, la velocità di ingresso del sodio nel core sarà ad es. diminuita perchè la pompa ha diminuito la portata. Poichè le perturbazioni si propagano con la velocità del suono, e questa in un liquido è dell'ordine di parecchie migliaia di m/s , si può ritenere che, a meno di infinitesimi, allo stesso istante t troveremo diminuita la velocità di circolazione in tutto il circuito (ovviamente la diminuzione di velocità rispetto al tempo è un fatto progressivo, che noi fotografiamo in certi istanti discreti, ma quello che ci interessa è che la portata massica sia la stessa in tutto il circuito, senza che vi siano pozzi o sorgenti dovute ad effetti di compressibilità). Allora, in base alla 6.33, in base alle ρ che c'erano nei vari punti all'istante iniziale, possiamo calcolarci le \dot{u} nei vari punti (in direzione assiale), in modo che in ogni punto la portata sia la stessa, all'istante t_0 . Siamo cioè in grado, a noto il valore

della portata istante per istante (discreto) all'ingresso del core, di calcolarci la velocità media \bar{u} del sodio lungo il core. (\bar{u} è definita dalla 6.33).

\bar{u} è quindi noto come funzione di z e di t . Bisogna ora calcolare u in funzione di r . Ci viene in aiuto il cosiddetto "profilo universale delle velocità", o "legge del muro" (o eventualmente "legge dall'onda"). Non stiamo a derivare come ad esso si perviene (anche perchè si può pervenire in diversi modi). Diciamo solo che, definiti:

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_w / \rho}} \quad 6.34$$

ove τ_w è lo sforzo di taglio alla parete (che è noto ad es. come $f(Re)$),

$$y^+ = \frac{y \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu} \quad 6.35$$

con ν viscosità cinematica,

e y distanza normale alla parete, misurata a partire dalla parete quindi nel nostro caso:

$$y = r - r_0 \quad 6.36$$

con r_0 raggio esterno barra

è possibile dare la relazione

$$u^+ = u^+(y^+) \quad 6.37$$

che equivale alla cercata:

$$u = u(r) \quad 6.38$$

Tra le più diffuse relazioni del tipo 6.37 ricordiamo (1):

$$y^+ = u^+ \frac{1}{E} \left\{ e^{ku^+} - 1 - ku^+ - \frac{(ku^+)^2}{2!} - \frac{(ku^+)^3}{3!} - \frac{(ku^+)^4}{4!} \right\} \quad 6.39$$

con $E = 10.1$ e $k = 0.407$ 6.40

Nota $\bar{u}(z)$ ciò non significa ancora che sia noto $u(z)$, ma, considerando che la variazione di \bar{u} con z è molto piccola, si potrebbe praticamente considerarla indipendente da r e porre:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 6.41$$

In tal caso sarebbe nota la $u(r, z, t)$ e quindi avremmo ben due equazioni a nostra disposizione per calcolarci la $v(r, z, t)$. Avremmo a disposizione la 6.31 per calcolarcela punto per punto con u una semplice equazione algebrica; avremmo in tal caso la 6.30 per verificare la validità della 41; oppure potremmo tentare una soluzione analitica della 30, e usare la 31 per verificare la 41. Se per caso le cose non andassero bene, cioè la 41 non fosse verificata, basterebbe modificarla, per tentativi, fino a che, nel

(1) Rohsenow Hartnett, op. cit., p. 7.9

metodo suddetto, risulti verificata.

Trovataci così a priori, "a tavolino", senza intralciare la preziosa memoria operativa del computer, la $v(r,z,t)$ come $v(u(r,z,t))$, e inseritine su un nastro i valori; nota anche la $u(r,z,t)$, siamo in grado di inserire queste due quantità nella 32 ricavandoci, numericamente, la $T(r,z,t)$.

Occorre, è vero, conoscere ξ_M , ma questa quantità, c che si è persino supposto brutalmente che fosse eguale a ξ_r , ottenendo risultati spesso in buon accordo con la realtà, è sperabile ci venga fornita dagli sperimentali, con esperimenti non necessariamente difficili (perchè ξ_M esprime una proprietà fisica del sodio - sia pure in una data geometria e a una data velocità, sia pure influenzata eventualmente da altri fattori ancora - così come esprimono altre proprietà fisiche ρ μ K ; mentre h (coefficiente di scambio termico) non è una proprietà fisica: è un parametro che collega la realtà fisica col nostro modello matematico).

A questo punto non ci resta che discretizzare l'eq. 6. 32. Si noti che siamo praticamente riusciti a rimuovere l'approssimazione delle proprietà fisiche costanti. Ciò è dipeso da una attenta analisi della derivazione delle suddette equazioni e dal modo in cui le proprietà fisiche giocano in esse.

$$\begin{aligned}
\beta_{ikn} c_{ikn} \frac{\partial T_{ik}}{\partial t} \Big|_n &= -\beta_{ikn} c_{ikn} v_{ikn} \frac{T_{i,k+n} - T_{i,k-n}}{2\Delta z} \\
&- \beta_{ikn} c_{ikn} v_{ikn} \frac{T_{i+1,kn} - T_{i-1,kn}}{2\Delta r} + q_{ikn}^m \\
&+ \frac{T_{i-1,kn} - T_{i,kn}}{r_i \Delta r^2} + \frac{T_{i+1,kn} - T_{i,kn}}{r_i \Delta r^2} \\
&\quad \frac{\left(r_i - \frac{\Delta r}{2}\right) K_{i-1/2}}{\left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right) K_{i+1/2}} \\
&+ \beta_{ikn} c_{ikn} \epsilon_H \frac{T_{i+1,kn} + T_{i-1,kn} - 2T_{i,kn}}{\Delta r^2}
\end{aligned}$$

7.42

i, k, n indicano rispettivamente r, z, t

Le condizioni al contorno sono:

$T_{i,k,0}$ nota

$T_{0,k,n}$ è la stessa per il sodio e per la guaina

$T_{I,0,n}$ è prescritta dalle condizioni a monte

6.3 CIRCUITI

Nei circuiti del sodio il flusso si può considerare come essenzialmente unidimensionale; il calore scambiato con l'esterno è praticamente nullo; in un reattore di potenza, anche durante un transitorio la potenza termica ceduta ai tubi (o acquisita dagli stessi) per portare in equilibrio termico i tubi con il sodio è del tutto trascurabile.

In tali condizioni,

$$T = \text{costante in tutto il tratto} \quad 6.43$$

più precisamente:

$$T_{\text{core-scambiatore}} = T_{\text{uscita core}} \quad 6.44$$

$$T_{\text{scambiatore-core}} = T_{\text{uscita scambiatore}} \quad 6.45$$

inoltre:

$$T = \text{cost} \implies \rho = \text{cost} \quad 6.46$$

La velocità in ogni punto, anzi in ogni tratto a sezione costante, ci è data dall'equazione unidimensionale di continuità della massa:

$$\dot{m} = \rho A c = \text{cost} \quad 6.47$$

Infine, poichè il regime è altamente turbolento, le cadute di pressione sono proporzionali al quadrato della velocità c :

ove le K_i tengono conto delle perdite localizzate, mentre f è il noto fattore di attrito (basato sul diametro idraulico). Entrambe le quantità si trovano abbondantemente diagrammate, e tabulate e date da espressioni algebriche, essenzialmente in funzione di Re .

La prevalenza fornita dalla pompa è ovviamente eguale alla somma di tutte le cadute di pressione, per attrito e localizzate, più quella necessaria per accelerare il liquido, in transitorio (cfr. eq. 6.2).

Anche l'effetto del pressurizzatore si ripercuote essenzialmente sulla pressione.

In generale, nei circuiti i numeri di Reynolds e di Peclet, ($Re Pr = Pe$) saranno minori che non nel core. Se Pe fosse molto basso, esisterebbe anche la conduzione assiale e non sarebbero più vere, in transitorio, le 44 e 45. Si assisterebbe cioè ad un appiattimento e livellamento del gradiente di temperatura. Poichè comunque per evitare sbalzi termici avevamo detto che era necessario limitare tali gradienti, i due effetti della piccolezza del gradiente e della piccolezza della conduzione assiale si combinano e la conduzione assiale si può quindi trascurare. In tal caso si avrebbe che:

$$T_{\text{entrata core}}(t) = T_{\text{uscita scambiatore}}(t-\Delta t) \quad 6.49$$

con

$$\Delta t = \sum_i L_i / C_i \quad 6.50$$

ove L e C sono rispettivamente la lunghezza del e la velocità nel tratto i -esimo. Ovviamente le 49 e 50 valgono sia per il primario che per il secondario.

Su quale sia il Pe min che dia conduzione assiale, non c'è accordo fra i testi. (1) dà:

$$Pe \leq 30 \quad 6.51$$

mentre (2):

$$Pe \leq 100 + 160 \quad 6.52$$

Qualora si volesse tener conto dell'eventuale condu zione assiale, ciò si potrebbe fare a priori, separatamente dal codice, calcolandone, per diverse condizioni di funzionamento, l'effetto.

(1) El-Wakil, Nuclear Heat Transport, p. 271

(2) Rohsenow Hartnett, op. cit., p. 7.26

6.4 SCAMBIATORE DI CALORE

Per scambiatori di calore intendiamo quelli tra sodio e sodio; allo scambiatore sodio-acqua daremo il più esatto nome di generatore di vapore.

Le cadute di pressione sono sempre date dalle 6.47, c con l'avvertenza che però le densità cambiano, sia pure modestamente, con la temperatura; l'analisi monodimensionale vale certamente per il fluido che si trova lato ~~sedie~~ tubi (nell'Enrico Fermi tale è il sodio secondario(1): per fissare le idee, ammetteremo che questa sia la situazione anche nel nostro scambiatore, cioè che il flusso termico vada dal fluido esterno al tubo al quello in terno al tubo - come può essere preferibile in base a considerazio ni di scambio termico - anche se ciò non modifica in alcun modo le nostre equazioni), mentre l'analisi monodimensionale cade in difetto per il fluido lato mantello se questo scorre essenzialmente perpendicolare ai tubi. Ora, una tale scelta impiantistica a nostro giudizio non è conveniente, in quanto il flusso a correnti ortogonali

- favorisce le vibrazioni
- provoca una temperatura, un flusso termico e una pressione non uniformi sulla circonferenza del tubo
- dà probabilmente h minori.

(1) El-Wakil, Nuclear Heat Energy Conversion, p. 319

Comunque, almeno all'ingresso e all'uscita il fluido lato mantello circolerà ortogonale ai tubi.

Lo scambiatore può essere a uno o a più percorsi.

Nel primo caso è da ritenersi che sia a controcorrente, perchè così, a parità di superficie - e di costo dell'impianto - si ottengono maggiori flussi termici; nel secondo caso sarà una combinazione di percorsi a equi- e contro- corrente, ammesso che però il flusso dell'altro fluido non sia a corrente ortogonale.

Poichè comunque dobbiamo fissarci su un certo modello, ci fissiamo su uno scambiatore a controcorrente; il fluido lato mantello circolerà in modo prevalentemente a corrente ortogonale nelle zone estreme entro la riga tratteggiata. Intorno alle righe tratteggiate il moto del fluido sarà intermedio tra di due suddetti. Per rendere l'analisi unidimensionale, e rendere quindi i calcolà più semplici non tanto a noi quanto piuttosto al calcolattore, ammetteremo che nelle zone estreme il sodio proveda in direzione verticale, in quella centrale orizzontale (cfr. fig. 1).

Poichè non è lecito attendersi sensibili variazioni di temperatura tra un tubo e l'altro, limiteremo e faremo limitare dal calcolatore i conti solo ad alcuni tubi opportunamente scelti. Anche un solo tubo potrebbe bastare, se si verificasse che anche all'entrata e all'uscita i tubi 1 e 2 non sono in condizioni troppo diverse tra loro. Per il calcolo del flusso termico e del-

le temperature abbiamo a nostra disposizione:

l'equazione dell'energia 6.4 integrata su un volume tale che le sue facc~~ie~~ siano normali e parallele alle linee di corrente. Una tale equazione possiamo prenderla ad es. da (1)

$$\int_V \rho \frac{dQ}{dt} dV - \frac{dL}{dt} = \int_V \dot{q} \left[\rho \left(u + qz + \frac{v^2}{2} \right) \right] dV + \int_A \rho \left(u + \frac{p}{\rho} + qz + \frac{v^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad 6.53$$

ove il primo termine è la potenza termica ricevuta dall'esterno
il secondo è la potenza meccanica scambiata entro il volume V

V è il volume di controllo e A la sua superficie esterna. Scegliamo V in modo diverso nei due casi di flusso controcorrente o ortogonale. Iniziamo dal primo: un simile volume di controllo è dato, per il fluido che scorre entro il tubo, da un tratto di tubo; per il fluido esterno al tubo, è una zona cilindrica anulare, intorno al tubo, di lunghezza eguale al L (come la stessa lunghezza del tratto di tubo che per il fluido interno), e di area A eguale all'area effettiva di flusso del sodio relativo al tubo in questione. Cfr. fig. 2.

il terzo termine tiene conto dell'aumento delle varie forme di energia; iniziamo col notare che, trattandosi di un liquido, in convezione forzata, l'energia cinetica e posizionale è trascurabile rispetto a quella interna = $c_V T = cT$.

Il quarto termine dà la differenza fra la portata entrante e la portata uscente moltiplicate entrambe per il ri-

(1) Romiti, Meccanica dei Fluidi, p. 76

spettivo contenuto energetico.

$$u + p/\rho = i = c_p T = c T \quad 6.54$$

(i entalpia massica)

a parte una costante arbitraria. Gli altri due termini sono trascurabili. La potenza termica entrante ed uscente la possiamo calcolare a regime in base alle:

$$\dot{m}_1 c_1 dT_1 = \dot{m}_2 c_2 dT_2 = H dx (T_2 - T_1) \quad 6.55$$

ove H (coefficiente di scambio termico ^{scambio sodio-sezio} globale) è dato da (1):

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{h_{est}} + \frac{1}{h_{int d}} + \frac{L_{Dest}}{k D_{em}} + \frac{D_{est}}{h_{int d} D_{in}} + \frac{D_{est}}{h_{in} D_{in}} \quad 6.56$$

est esterno

in interno

h coefficiente scambio termico sodio-sezio tubo

d indica l'eventuale presenza di impurità, di corrosione

D diametro

k conduttività termica

$$D_{lm} \text{ diametro logaritmico medio} = \frac{D_e - D_i}{\lg D_e - \lg D_i} \quad 6.57$$

Se i coefficienti di scambio termico sono costanti (cosa senz'altro ammissibile per tratti non troppo lunghi) la 55 è integrabile in

$$(T_1 - T_2) = (T_1 - T_2)_{x=0} \exp \left[Hx \left(\frac{1}{\dot{m}_2 c_2} - \frac{1}{\dot{m}_1 c_1} \right) \right] \quad 6.58$$

(1) Rohsenow Hartnett, op. cit., p. 18.2

e il flusso termico vale:

$$Q = \frac{(\bar{T}_1 - \bar{T}_2)_{x=L} - (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)_{x=0}}{\frac{1}{m_2 c_2} - \frac{1}{m_1 c_1}} \quad 6.59$$

Mediante la 6.59, applicata per tentativi a tratti non troppo lunghi, possiamo determinare lo stato a regime. In transitorio una soluzione analitica della 6.53 non è possibile, e dovremo quindi ricorrere a una soluzione numerica; sarebbe comunque opportuno dare del suo primo termine, che non è altro che Q , una definizione meno brutale di

$$Q = H (T_{m1} - T_{m2}) A \quad 6.60$$

ove T_m sono opportune quantità medie, che dovrebbero rispondere ai due requisiti:

$$1) \quad T_m = \frac{1}{V} \int_V T dV \quad 6.61$$

2) verificare la 60: all'uopo basterebbe eventualmente modificare la 60 in

$$Q = H \Delta T A \quad 6.62$$

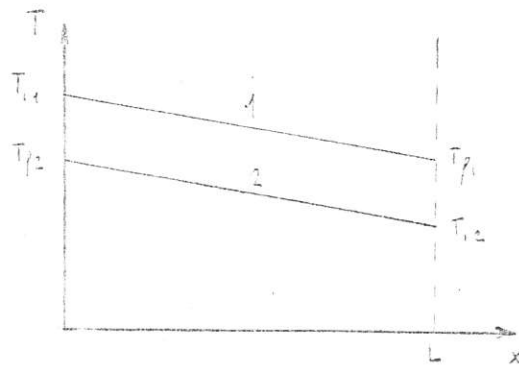
$$\text{con} \quad \Delta T = f(T_{m1}, T_{m2}) \quad 6.63$$

Ora, nel nostro caso

$$\frac{1}{V} \int_V T dV = \frac{1}{L} \int_0^L T dx \quad 6.64$$

e la T sarebbe nota a regime in base alle 58 e 59, e si potreb-

be ipotizzare che anche in transitorio la distribuzione delle temperature sia press'a poco la stessa, cosa che è senz'altro verificata perchè abbiamo detto che dobbiamo limitare al massimo le variazioni di temperatura. Il fatto è che le 58 e 59 dipendono da $m_1 c_1, m_2 c_2$, che nel caso economicamente più interessante - quello che permette di mantenere la stessa differenza di temperatura tra i due fluidi press'a poco in tutto lo scambiatore, - sono eguali. Ciò comporta nella 6.59 una relazione d'indeterminazione 0/0 che non può non dare enormi errori numerici. Poichè comunque in tal caso la variazione di temperatura è lineare, cioè:



risulta abbastanza ben giustificato porre, in ogni tratto di lunghezza L :

$$T_m = \frac{T_i + T_f}{2} \quad 6.65$$

$$Q = H (T_{m1} - T_{m2}) A \quad 6.66$$

In base a tutte le assunzioni fatte, e discretizzando con un metodo alle differenze finite in avanti, otteniamo le due equazioni:

(am sostituiamo i, f , con l'indice di elemento j ($j = 0, 1, \dots, N$))

(j cresce con x), e usiamo come al solito n come indice temporale):

$$\begin{aligned}
& - A_1 H \left[\frac{T_{1j n} + T_{1j+1 n} - T_{2j n} - T_{2j+1 n}}{2} \right] + \\
& + \dot{m}_1 c_1 \left[T_{1j n} - T_{1j+1 n} \right] = \\
& = \frac{V_1 \rho_1 c_1}{\Delta t} \left[\frac{T_{1j+1 n} + T_{1j n+1} - T_{1j+1 n} - T_{1j n}}{2} \right] \quad 6.67
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H A_2 \left[T_{1j n} + T_{1j+1 n} - T_{2j n} - T_{2j+1 n} \right] + 2 \dot{m}_2 c_2 \left[T_{2j+1 n} - T_{2j n} \right] = \\
& = \frac{V_2 \rho_2 c_2}{\Delta t} \left[T_{2j+1 n+1} + T_{2j n+1} - T_{2j+1 n} - T_{2j n} \right] \quad 6.68
\end{aligned}$$

Nota la situazione all'istante $t=0$, e ammessa una per-
 turbazione in un istante immediatamente successivo t_{0+} , in conse-
 guenza della quale sia ad es.:

$$T_{1,0,0^+} = T^{\#}$$

introducendo tale valore nell'equazione che gli compete, e risol-
 vendo il sistema delle $2N$ (N è stato definito al fondo della
 pagina precedente) equazioni 67 e 68, si ottengono tutte le tem-
 perature all'istante $t = 1\Delta t$. E così via.

Le equazioni sono completamente disaccoppiate nel sen-
 so che da ciascuna equazione si ottiene sempre una incognita; per-
 ché però ciò sia realizzato in pratica occorre, nel risolverle,

occorre però procedere secondo le j crescenti per la 6.67 e secondo le j decrescenti per la 6.68. Infatti, ogni equazione dà la temperatura di ingresso nella sezione successiva, all'istante $n+1$, e poichè, prima di risolvere il sistema di equazioni nelle incognite all'istante $n+1$, già conosciamo all'istante $n+1$ la temperatura di ingresso del sodio nello scambiatore, cioè già conosciamo $T_{1,0,n+1}$ e $T_{2,N,n+1}$, che sono ricavate non dalle equazioni dello scambiatore ma dalle 6.49 e simili (il che esprime matematicamente l'ovvio fatto fisico che le temperature di ingresso del fluido nello scambiatore dipendono dalle condizioni a monte e non da quanto capita nello scambiatore), introducendo nella 6.67, con $j=0$, il suddetto valore noto $T_{1,0,n+1}$, si ottiene subito $T_{1,1,n+1}$ e introducendo questa temperatura nella 6.67 con $j=1$ si deduce subito $T_{1,2,n+1}$, e così via.

Potrebbe venire il dubbio che, partendo dal lato sinistro per il fluido 1 e dal lato destro per il fluido 2, lavorando cioè su tratti diversi per le due equazioni, quando poi i tratti si incrociano, le cose potrebbero non andar bene. Uno sguardo attento alle equazioni 6.67 e 68 mostra che tale timore è infondato, perchè le temperature all'istante $n+1$ del fluido 1 dipendono:

- dalle temperature del fluido 1 all'istante n (note)
- dalle temperature del fluido 2 all'istante n (note)
- dalla temperatura di ingresso nel tratto in questione del fluido 1 (nota se si procede per il fluido 1 secondo le j crescenti);

ma non dipendono in alcun modo dalle temperature del fluido 2 al l'istante $n+1$.

Per calcolare la temperatura nelle zone estremali ~~si~~ in cui il flusso è essenzialmente ortogonale, si può costruire un volume di controllo come quello rappresentato dalla fig.3 a fondo volume. Abbiamo cioè immaginato di sezionare lo scambiatore di calore con due piani orizzontali, (supposto sempre che lo scambiatore di fig. 1 sia effettivamente orizzontale), a distanza a tra loro, e con due piani verticali, a distanza l tra loro, normali ai tubi. Le altre due superfici di raccordo potrebbero ~~è~~ anche essere quelle esterne dello scambiatore. In ogni caso, d è molto maggiore di l e di a . Come si vede, a parte la forma, il bilancio termico non è sostanzialmente diverso da quello per il volume del caso precedente, e anche le equazioni sono le stesse, e quindi non è il caso di riscriverle. E' però possibile porre, per entrambi i fluidi, per incrementare un po' la precisione della definizione di T_m ,

$$T_m = \frac{T_i - T_f}{\lg T_i - \lg T_f} \quad 6.69$$

che, anche se non sembra, è press'a poco eguale a $(T_i + T_f)/2$.

Se, per motivi impiantistici, lo scambiatore fosse in parte a equicorrente, nella 6.68 basterebbe scambiare $j+1$ con j , e nel risolverla si procederebbe secondo i j crescenti.

6.5 GENERATORE DI VAPORE

Nel generatore di vapore - ammettiamo, per fissare le idee, che come nell' Enrico Fermi il sodio circoli lato mantello - e ammettiamo che la struttura geometrica dell'impianto sia come quella supposta e descritta per lo scambiatore di calore - i processi fisici, le equazioni matematiche che li descrivono, non sono diversi da quelli descritti per lo scambiatore di calore, nel tratto in cui viene riscaldata l'acqua liquida. In tale tratto, occorrerà al più apportare qualche piccola correzione ai vari coefficienti numerici, sperimentali, per tener conto della variazione delle proprietà fisiche che in prossimità del punto di ebollizione è sensibile. ~~Similmente, nella zona in cui l'acqua è comp~~ (Ciò naturalmente solo se i coefficienti di scambio termico non sono già noti in forma così precisa da tener conto della variazione delle proprietà fisiche).

Similmente, nella zona in cui l'acqua completamente e vaporata viene ~~riscalda~~ surriscaldata dal sodio, a parte la variazione delle proprietà fisiche, da tener presente con qualche formula empirica correttiva, il processo fisico e le equazioni che lo descrivono sono gli stessi che per lo scambiatore sodio-sodio. Nel tratto in cui l'acqua bolle, il processo è alquanto diverso,

e a tale tratto limitiamo le nostre considerazioni.

Poichè l'ebollizione è un fenomeno in cui le proprietà fisiche variano macroscopicamente, in base a quanto detto nel par. 6.1 non sarà più in generale possibile disaccoppiare l'equazione dell'energia da quelle di conservazione della massa e della quantità di moto. Anche trascurando nella 6.53 tutte le quantità che già avevamo trascurato nel par. 6.4, e cioè le energie cinetiche e posizionali, resta comunque il fatto che la caduta di pressione lungo un tratto L di tubo a sezione costante, $\Delta p = \Delta p_{att} + \Delta p_{acc}$: senza perdite localizzate, è data da:

$$\Delta p = \Delta p_{att} + \Delta p_{acc} \quad 6.70$$

$$\Delta p_{att} = \left(f \frac{L}{D_c} \rho_l \frac{v_l^2}{2} \right) (1+R) \quad 6.71$$

ove R è il "moltiplicatore di Martinelli" che varia in funzione di p , v , x ;

$$x \text{ titolo del vapore} = \frac{\dot{m}_v}{\dot{m}_t} \quad 6.72$$

$$\alpha \text{ grado di vuoto} = \frac{\text{volume vapore}}{\text{volume totale}} \quad 6.73$$

l indice di liquido

v indice di vapore

t indice totale

$$A \Delta p_{acc} = \dot{m}_{l,out} V_{l,out} + \dot{m}_{v,out} V_{v,out} - \dot{m}_{l,in} V_{l,in} - \dot{m}_{v,in} V_{v,in} \quad 6.73$$

$$= \frac{1}{A} \left[\dot{m}_T (1-x_{out}) \frac{\dot{m}_T (1-x_{out})}{\rho_l (1-\alpha_{out})} + \dot{m}_T x_{out} \frac{\dot{m}_T x_{out}}{\rho_v \alpha_{out}} - \dot{m}_T (1-x_{in}) \frac{\dot{m}_T (1-x_{in})}{\rho_l (1-\alpha_{in})} - \dot{m}_T x_{in} \frac{\dot{m}_T x_{in}}{\rho_v \alpha_{in}} \right] \quad 6.74$$

in base alle:

$$V_l = \frac{\dot{m}_l}{\rho_l A_l} = \frac{(1-x) \dot{m}_T}{(1-\alpha) A \rho_l} \quad 6.75$$

$$V_v = \frac{\dot{m}_v}{\rho_v A_v} = \frac{x \dot{m}_T}{\alpha A \rho_v} \quad 6.75'$$

Anche dando una correlazione fra α e x , (cosa resa difficile dal fattore di slip la cui variazione non è né teoricamente né sperimentalmente ben nota), la variazione $x_{out} - x_{in}$ nella 6.74 presuppone la conoscenza della energia trasferita in tale tratto di tubo al vapore, ma per conoscere esattamente il trasferimento di energia in tale tratto di tubo occorre conoscere esattamente la pressione in tale tratto di tubo, giacché T ed r (calore di evaporazione/ unità di massa) e p sono quantità tra loro collegate.

Le tre equazioni dell'energia, dell'impulso e della massa appaiono quindi accoppiate, se vogliamo risultati esatti.

D'altra parte, considerando che:

- non possiamo impostare calcoli che richiedano ad un calcolatore tempi "non reali"
- è inutile cercare nelle equazioni una precisione superiore a quella con cui abbiamo i dati sperimentali (nella fattispecie, i coefficienti di scambio termico h)
- occorre valutare quali quantità sono assai grandi e quali sono piccole, e indubbiamente la caduta di pressione lungo il tubo è senz'altro molto piccola rispetto alla pressione media di evaporazione
- una volta calcolato per tentativi lo stato a regime è possibile tener meglio conto della variazione delle proprietà fisiche, durante il transitorio, "arrangiando" alcuni coefficienti, ci sembra opportuno trascurare la caduta di pressione e scrivere l'equazione di bilancio termico in ogni tratto, lasciando al programmatore il compito di programmare il calcolatore in modo che nei vari tratti tenga conto delle effettive condizioni fisiche in quel punto, così come occorre "avvertire" il calcolatore che quando $T = T_{\text{ebol}}$, oppure $x = 1$, deve cambiare equazioni.

Con gli stessi volumi di controllo ~~mostrati~~ usati nel par. 6.4 e mostrati nelle fig. 2 e 3, abbiamo:

$$\text{posto } T_2 = T_{\text{eboll}} - 2$$

6.76

$$\begin{aligned}
 & -HA_1 \left[T_{1Jn} + T_{1J+1n} - 2T_2 \right] + 2\dot{m}_1 c_1 \left[T_{1Jn} - T_{1J+1n} \right] = \\
 & = \frac{V_1 \rho_1 c_1}{\Delta t} \left[T_{1Jn+1} + T_{1J+1n+1} - T_{1Jn} - T_{1J+1n} \right] \quad 6.77
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & HA_2 \left[T_{1Jn} + T_{1J+1n} - 2T_2 \right] + 2\dot{m}_2 r \left[x_{J+1n} - x_{Jn} \right] = \\
 & = \frac{V_2 \rho_2}{\Delta t} \left\{ \alpha_{Jn+1} \left(S_{Jn+1} \frac{1-x_{n+1J}}{x_{Jn+1}} + 1 \right) + \alpha_{J+1n+1} \left(S_{J+1n+1} \frac{1-x_{n+1J+1}}{x_{J+1n+1}} + 1 \right) \right. \\
 & \quad \left. - \alpha_{Jn} \left(S_{Jn} \frac{1-x_{Jn}}{x_{Jn}} + 1 \right) - \alpha_{J+1n} \left(S_{J+1n} \frac{1-x_{J+1n}}{x_{J+1n}} + 1 \right) \right\} u_2 \\
 & \quad + \left[\alpha_{Jn+1} x_{Jn+1} + \alpha_{J+1n+1} x_{J+1n+1} - \alpha_{Jn} x_{Jn} - \alpha_{J+1n} x_{J+1n} \right] r_{cl} \quad 6.78
 \end{aligned}$$

in quanto:

$$u + \frac{p}{\rho} = i \quad 6.79$$

$$\int_A \rho \left(u + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = \dot{m}_e \rho_e i_e + \dot{m}_v \rho_v i_v \quad 6.80$$

$$= (1-x) \dot{m}_t \rho_t i_e + \dot{m}_t x \rho_v (i_e + r) \quad 6.81$$

$$= \dot{m}_t x r + \dot{m}_t i_e \quad 6.82$$

$$\int_V \rho u \, dV = \rho_e u_e V_e + \rho_v u_v V_v \quad 6.83$$

$$= \rho_e u_e (1-x)V + \rho_e (u_e + x r_d) V x \quad 6.84$$

$$= \rho_e u_e x \left[S \frac{1-x}{x} + 1 \right] + \rho_e r_d x^2 V \quad 6.85$$

in quanto

$$\frac{1-x}{x} = \frac{m_e}{m_v} = \frac{\rho_e A_e V_e}{\rho_v A_v V_v} = \frac{\rho_e}{\rho_v} \frac{1-x}{x} \frac{1}{S} \quad 6.86$$

con r_d calore di disgergazione = $r - p \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right)$ 6.87

ed S rapporto di slip

Ovviamente i calcoli vengono molto semplificati e se si ammette (ciò che vale con ottima approssimazione per x non troppo piccolo) che la potenza termica entrante nell'elemento di volume dia luogo solo a variazione del titolo. In tal caso il secondo membro della 6.78 è:

$$\frac{V \rho_e r}{\Delta t} \left(x_{J+1, n+1} + x_{J, n+1} - x_{J+1, n} - x_{J, n} \right) \quad 6.88$$

PROGETTO DI REATTORE VELOCE A SOPIO DELLA GENERAL ELECTRIC DA 1000 MW(e) (°)

Potenza: MW(t): core	2,125	Ingresso core: temperatura °C	425
riflettore assiale	300	Uscita core "	591.7
riflettore radiale	75	Massimo guaina "	720.6
Geometria del core: a pancake		Massimo combustibile "	2,591.7
altezza core (cm)	60.96	Portata massica Kg/s	12,020
riflettore assiale	45.7	Velocità nel core m/s	3.38
riflettore radiale	76.2	Caduta di pressione nel circuito N/m ²	275790
diametro core	356.6	Diametro est. barretta mm	6.35
riflettore assiale	356.6	pellet EST.	5.588
riflettore radiale	432.8	pellet int.	1.524
Combustibile	ossido	Numero barrette per assemblea	470
Arricchimento core %	18	Assemblee nel core	225
riflettore	0.3	Coefficiente reat. vuoti:	negativo

TABELLA 2

A	E	1 keV	100 keV	1 MeV	10 MeV	20 MeV
23	(Na)	6.028	0.284	0.898	2.840	4.015
56	(Fe)	0.039	0.392	1.238	3.916	5.538
⁹⁰ ₉₀	(Zr)	0.046	0.462	1.460	4.618	6.531
238	(U)	0.064	0.643	2.033	6.430	9.093

$$da: 1(1+1) \quad 0.32950 \quad A^{1/3} \frac{A}{A+1} \sqrt{E} \quad (\text{cfr. 2.42}) \quad E: \text{MeV}$$

TABELLA 3

$$\nu_e - \nu_{cm}$$

A	ν_{cm}	0°	30°	60°	90°
23	0°		28.7998	57.8895	89.8949 87.5104
56	0		29.4962	59.1218	88.9769
90	0		29.6847	59.4517	89.3634
238	0		29.8801	59.7919	89.7592

(cfr. Eq. 2.37)

PROPRIETA' TERMODINAMICHE DEL SODIO

Fonte	Temperatura T °C	°F	Densità kg/m ³	Viscosità din. Ns/m ²	Calore specif. j/kgK	Conduktività W/mK	Prandtl	Resistività $\mu\Omega$
1	91.67 (?)		929.16	6.938 10 ⁻⁴	1.38 10 ³	86.15	0.0011	
2	93 (?)		829.1 829.1	6.983 10 ⁻⁴	1.38	86.2	0.011	
3	100	212	927.08	7.046	1.3828			
4	100		928	6.86	1.3828	86.2		9.65
4	103.7			6.86				
3	150	302		5.406				
4	167.6			5.04				
4	200	392			1.339	81.5		13.18
3	200		904.17	4.497	1.339	81.50	0.0074	
1	202.78	400	901.93	4.419	1.339	80.27	0.0072	
3	250	482		3.919				
4	250		891					14.90
3	300	572	882.06	3.448	1.33043	75.69	0.0059	
4	300					75.72		16.70
1	369.44	700	860.27	2.891	1.297	72.31	0.0050	

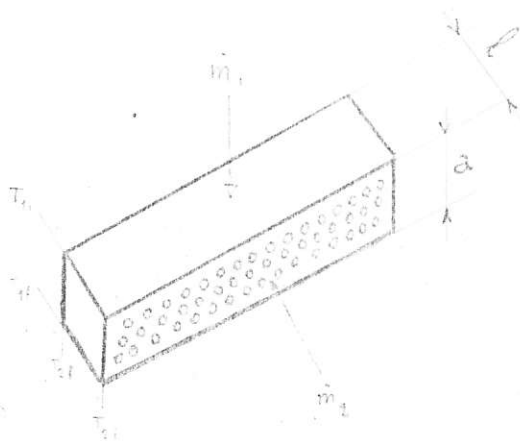
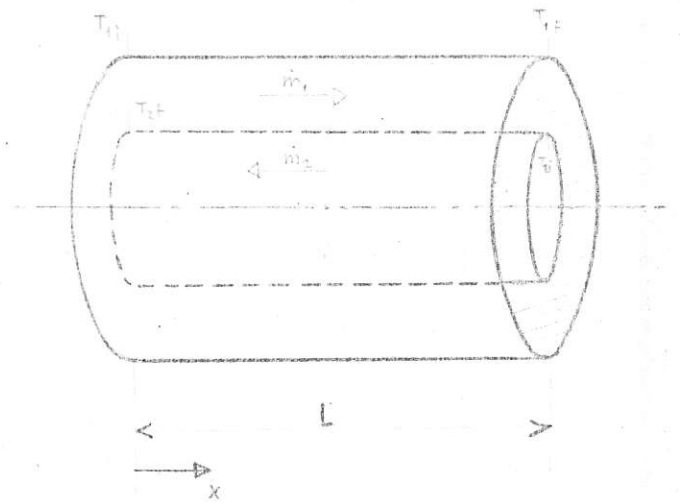
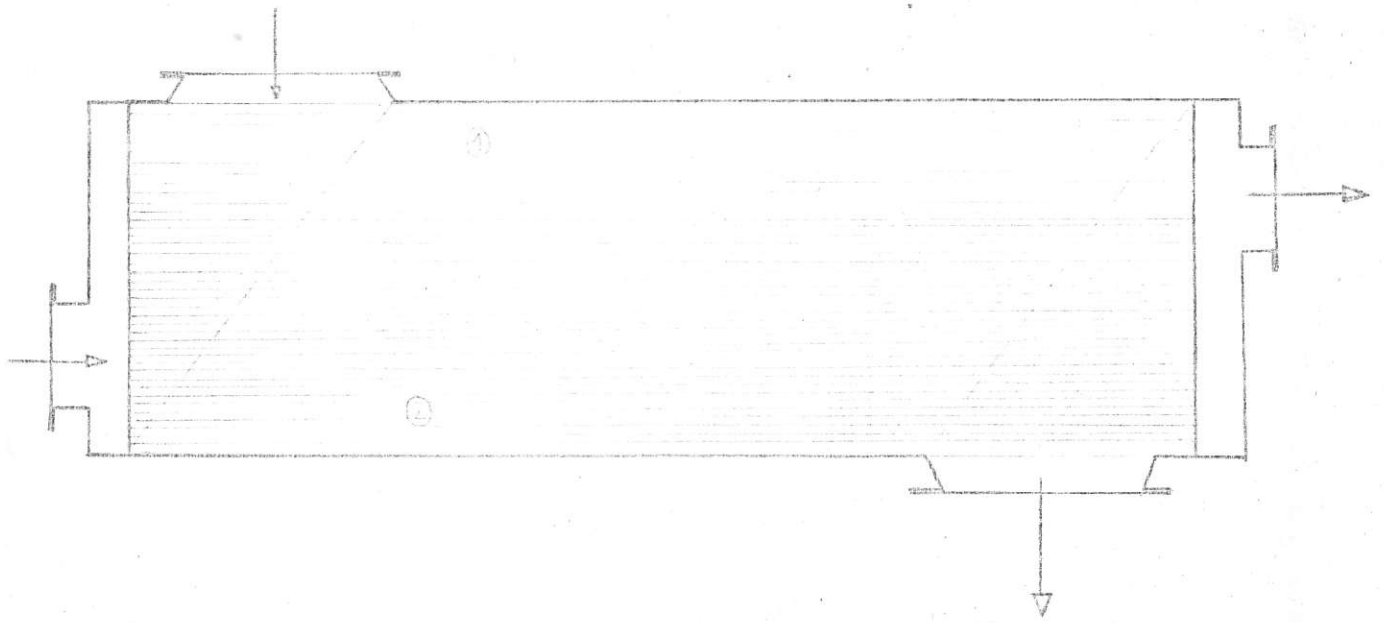
Fonte	Temperatura T		Densità kg/m ³	Viscosità din. Ns/m ²	Calore spec. C _p j/kg K	Conduktività k W/m K	Prandtl
	°C	°F					
2	371		860.2	2.812 10 ⁻⁴	1.30 10 ³	72.3	0.0051
3	400	752	859.15	2.837	1.278	72.91	0.0051
4	400	752	854	2.69	1.278	71.20	0.0048
3	500	932	834.16	2.428	1.262	66.79	0.0046
4	500	932				66.80	
1	536.11	1000	820.22	2.023	1.255	65.39	0.0040
4	550		817				
3	600	1112	809.17	2.098	1.254	62.69	0.0042
4	600	1112			1.254		
3	700	1292	783.05	1.858	1.257	58.99	0.0040
4	700	1292	780	1.82			
1	702.78	1300	778.57	2.023	1.255	59.68	0.0038
2	704		778.5	1.692	1.26	59.7	0.0037
3	800	1472	757.1	1.647	1.268	54.70	0.0038
4	800	1472			1.268		
3	900	1652		1.499	1.288		

(1) Chapman, Heat Transfer, 2^a ed., Macmillan Company,

(3) El-Wakil, Nuclear Heat Transport, p. 267

(2) Eckert Drake, Analysis of Heat Transfer, P785

(4) Rohsenow Hartnett, Handbook of Heat Transfer, 2.57



B I B L I O G R A F I A
=====

- G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press,
New York 1970
- J.M. Blatt - V.F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, Wiley,
New York 1952
- V. Boffi, Fisica del Reattore Nucleare, Patron, Bologna, 1974
- M. Born, Fisica Atomica, Boringhieri, Torino, 1971 (1933)
- Capetti, Motori Termici, UTET, Torino, 1967
- S.E. Corno, Introduzione ai metodi di calcolo per i reattori veloci
- B. Davison, Neutron Transport Theory, Clarendon Press, Oxford, 1957
- E.R.G. Eckert - R.M. Drake, Analysis of Heat and Mass Transfer,
McGraw-Hill, 1972
- M.M. El-Wakil, Nuclear Heat Transport, International Textbook,
Scranton, 1971
- M.M. El-Wakil, Nuclear Energy Conversion, International Textbook,
Scranton 1971
- R.W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers,
McGraw-Hill, 1973
- Hughes, D.J., Neutron Cross Sections,
- D.J. Hughes, J.A. Harvey, Neutron Cross Sections, United States
Atomic Energy Commission

- D.F. Jackson, Nuclear Reactions, Chapman, London
- Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory, Addison-Wesley, 1966
- Massimo, The Physics of High Temperature Reactors
- Particle Data Group 71,
- POWER, Plant des Issue 1960
- Rohsenow Hartnett, Handbook of Heat Transfer, McGraw-Hill 1972
- Romiti, Meccanica dei Fluidi, ISEDI, Milano 1974
- Segrè, Nuclei e Particelle, Zanichelli 1964
- A.M. Weinberg - E.P. Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain
Reactors, Un. of Chicago Press, 1958
- Williams, M.M.R., The Thermalization and Slowing Down of Neutrons
- W.S.C. Williams, An Introduction to Elementary Particle Physics,
Academic Press, 1971
- S. Yiftah, D. Okrent, P.A. Moldauer, Fast Neutron Cross Sections,
Oxford Pergamon Press, 1960